



TITLE:

多電子系の秩序状態(講義ノート)

AUTHOR(S):

立木, 昌; 神山, 保

CITATION:

立木, 昌 ...[et al]. 多電子系の秩序状態(講義ノート). 物性研究 1981, 35(6): 323-370

ISSUE DATE:

1981-03-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/90214>

RIGHT:

講義ノート

多電子系の秩序状態

東北大学金属材料研究所 立 木 昌*

1. はじめに

金属中の電子系は、電子間有効相互作用が斥力の場合、絶対零度では強磁性になり、引力の場合には超伝導になる。このような多電子系の秩序状態を取り扱う一つの方法に、梅沢博臣氏により開発されたボゾン理論がある。このボゾン理論とはどのような方法なのか、例を挙げて説明しよう。

例 1. 金属中の電子

陽イオンは一様なバックグラウンドをなしており、その上を電子が運動していて、電子間には強いCoulomb相互作用が働いているというモデルをとる。このような電子系には集団運動のモードとしてプラズマ振動が存在する。一方、各電子についてみると、強い斥力のCoulomb相互作用のため、他の電子は近づきにくくなり電子はホールの衣を着る。その結果、強いCoulomb相互作用は遮蔽され、有効相互作用は弱くなる。このホールの衣を着た電子は準粒子 (quasi-electron) と呼ばれる。quasi-electronの間の相互作用は弱くほとんど自由粒子として扱える。金属の伝導度などの物理量は強いCoulomb相互作用を持った裸の電子で記述されるのではなく、相互作用の弱いquasi-electronで記述される。つまり、このような電子系で実際に観測にかかるのはプラズマ振動とquasi-electronなのである。

例 2. 中性子と陽子の系

裸の中性子と陽子からなる系を考えると、各粒子間の相互作用は非常に強い。しかし実際には、中性子は陽子の衣を着、陽子は中性子の衣を着て準粒子となる。また、中性子は陽子と結合して重陽子となる。観測にかかっているのは相互作用が弱く寿命が長いこれらの3つの粒子である。

例 3. 遍歴電子による強磁性

例えばNiなどがこの例と考えられているが、このような系内の電子間には非常に強い相互作用、すなわちCoulomb相互作用が働いている。この相互作用とパウリ原理によって電子系の

* TACHIKI Masashi

スピンは分極を起こし、上向きスピンを持つ電子と下向きスピンを持つ電子の総数に差が現われる。電子の性格を調べるために、例えば下向きスピンの電子を1個付け加えたとする。すると電子間の強い相互作用のため、この裸の電子は安定でなくなり、図1の様に2つの異なった

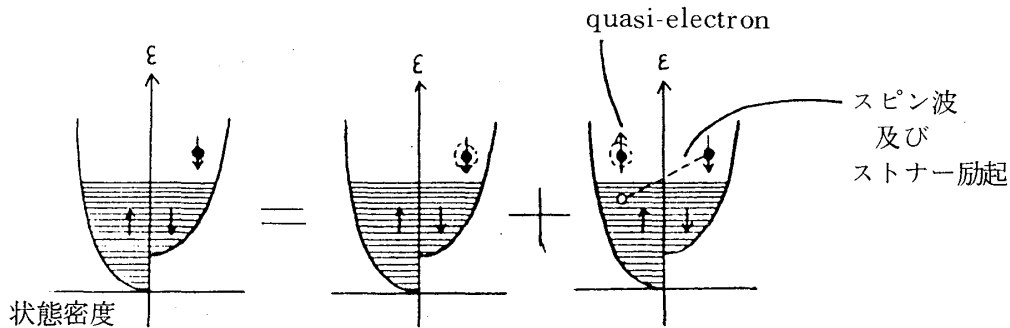


図1. 強磁性遍歴電子系に加えられた電子の状態変化

状態に分れる。一方はホールの衣を着た下向きスピンのquasi-electron状態である。他方の状態では、上向きスピンの電子が励起して上向きスピンを持つquasi-electronができ、更に上向きスピンの電子が励起した結果生じたホールと付け加えられた下向きスピンの電子が結合して対をなし、集団運動としてのスピン波あるいはStoner励起が発生する。実際にNiに電波や中性子を当てて電子の励起を測ると、裸の電子の励起ではなしに、スピン波やquasi-electronが観測にかかるのである。

上に挙げた3つの例からもわかるように、実際の物理量として測定にかかる粒子は強い相互作用を持った裸の電子ではなく準粒子の方である。このような観測にかかる粒子のことを物理的粒子と呼ぶ。ボゾン理論は、相互作用の非常に強い裸の粒子によって表現された物理量を、相互作用が弱くほとんど自由とみなせる物理的粒子で記述し直す dynamical map あるいは漸近場展開と呼ばれる方法を、その基礎においている。そして強磁性状態、超伝導状態等の秩序状態を物理的粒子の一つである Goldstone boson の凝縮したものとして記述する。

多電子系の主な秩序状態としては強磁性と超伝導があるが、以後、超伝導のボゾン理論による取り扱いを詳しく述べる。

2. 超伝導におけるボゾン理論^{1~3, 21)}

超伝導は電子間にBCS引力相互作用が働いている時に出現する。超伝導を取り扱う方法の一つに、Gor'kovのGreen関数法がある。このGor'kovの方法は一般には非局所非線形方程式

となり解くことが困難であるが、特に温度 T が超伝導転移温度 T_c に近い場合や、磁場 H が上部臨界磁場 H_{c2} に近い場合には、線形方程式で近似でき解くことが容易になる。しかし、これらの条件からずれて超伝導の秩序が発達すると、線形近似は許されず、取り扱いがむずかしくなる。

ボゾン理論の立場からは、実際に観測されるのは物理的粒子であり、これらの粒子はほとんど自由に近いので、超伝導状態も物理的粒子で記述されたならばこの状態を記述する方程式は線形方程式に帰着されるのではないかと予想できる。

§ 2.1 Lagrangian 密度

まず Lagrangian 密度を定義しよう。電子の運動エネルギー、BCS 相互作用と電磁場のエネルギーを含めた Lagrangian 密度 $L(\varphi(x), A_\mu(x))$ を考える。ここに $\varphi(x)$ は電子の場、 $A_\mu(x)$ は電磁ベクトルポテンシャルを表わす演算子である。 $A_\mu(x)$ は 4 次元ベクトルで $A_\mu(x) = (A_0(x), A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ であり、 $A_0(x)$ は $\phi(x)$ でスカラーポテンシャルを表わし、 $(A_1(x), A_2(x), A_3(x)) = \vec{A}(x)$ が通常のベクトルポテンシャルである。 μ, ν などのギリシャ文字は $(0, 1, 2, 3)$ と動く 4 次元量の添字、 i, j, k などのラテン文字は $(1, 2, 3)$ と動く 3 次元量の添字とする。また、3 次元の空間ベクトル (G_1, G_2, G_3) はアルファベット文字の上に \rightarrow をつけて \vec{G} と表現することもある。4 次元ベクトル間のスカラー積は次のように定義する。

$$G_\mu V_\mu = -G_0 V_0 + \vec{G} \cdot \vec{V} \quad (2-1)$$

ここで 2 度繰り返して現われる添字については和をとるものと約束して和記号は省いた。微分演算子 ∂_μ を成分に分けて

$$\partial_0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2-2)$$

(c : 光速)

と定義しておくと便利である。

Lagrangian 密度はある種の変換に対して不変性を持っている。

1) 次の位相変換に対して不変である。

$$\begin{cases} \varphi(x) \rightarrow e^{i\theta} \varphi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) \end{cases} \quad (2-3)$$

ここで θ は定数とする。

2) 次のゲージ変換に対して不変である。

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x) \rightarrow \exp \left\{ i \frac{e}{\hbar c} \lambda(x) \right\} \varphi(x) \\ A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x) \end{array} \right. \quad (2-4)$$

ここで $\lambda(x)$ は任意の c -数関数とする。

$\lambda(x)$ が一様な場合にはゲージ変換は位相変換に帰着する。

古典論での電磁気学の場合、適当なゲージ条件を付け加えると方程式が簡単になり解きやすくなる。また、量子論の場合、電磁場を量子化する際には、まずどのようなゲージ条件を採用するか決めておく必要がある。そこでゲージ条件を次のように書く。

$$D_\mu(\partial) A_\mu(x) = 0 \quad (2-5)$$

$D_\mu(\partial)$ は 1 階の微分演算子で、 $D_\mu(\partial) = (0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ ととれば Coulomb gauge になり、 $D_\mu(\partial) = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ ととれば Lorentz gauge になる。今のところ $D_\mu(\partial)$ の具体的な形は決めずゲージを不定にしておく。超伝導の場合には Coulomb gauge も Lorentz gauge も不都合である事が後に示される。

ゲージ条件は付加条件なので、Lagrange 乗数として場 $B(x)$ を導入し、

$$L_B(x) = -B(x) D_\mu(x) A_\mu(x) \quad (2-6)$$

を Lagrangian 密度 $L(x) = L(\varphi(x), A_\mu(x))$ に付け加え、total Lagrangian 密度 $L_{\text{tot}}(x)$ とする。 $L_{\text{tot}}(x)$ に対して、 $A_\mu(x)$ 、 $B(x)$ に関する変分原理が成り立つとすれば、ゲージ条件は忘れて計算することができる。 $L_{\text{tot}}(x)$ の具体的表式は次のようになる。

$$\begin{aligned} L_{\text{tot}}(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + L_{\text{el}}(x, A_\mu(x)) \\ & - B(x) D_\mu(\partial) A_\mu(x) \end{aligned} \quad (2-7a)$$

ここで

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \quad (2-7b)$$

は電磁場テンソルである。 $L_{\text{el}}(x, A_\mu(x))$ は電子部分の Lagrangian 密度であり、電子と電磁場の相互作用項も含んでいる。

$L_{\text{tot}}(x)$ に変分原理を適用して得られる場の Heisenberg 方程式は

$$\partial_\nu F_{\nu\mu}(x) = -4\pi j_\mu(x) - D_\mu(\partial) B(x) \quad (2-8)$$

$$D_\mu(\partial) A_\mu(x) = 0 \quad (2-9)$$

となる。ここに $j_\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \delta L(x) / \delta A_\mu(x)$ であり, Gauss 単位系での電荷密度を $\rho(x)$, 電流密度を $\vec{j}(x)$ と書くと $j_0(x) \rightarrow \rho(x)$, $\vec{j}(x) \rightarrow \frac{1}{c} \vec{j}(x)$ と対応させることができる。(2-8) 式は右辺第2項を取り除くと Maxwell 方程式

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}(x) - \text{grad}(\text{div} \vec{A}(x) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x)) \\ \qquad \qquad \qquad = -4\pi \frac{\vec{j}(x)}{c} \end{array} \right. \quad (2-10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi(x) + \text{div} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(x) = -\rho(x) \end{array} \right. \quad (2-11)$$

と一致する。

(2-8), (2-9) の演算子方程式を解くことが, これからの問題である。(2-8) の演算子方程式は $D_\mu(\partial) B(x)$ だけ Maxwell 方程式からずれているが, 実際の観測量は Maxwell 方程式に従わなければならない。つまり, 任意の2つの物理的観測可能な状態を $|a\rangle$, $|b\rangle$ とすると, (2-8) 式の左側から $|a\rangle$, 右側から $|b\rangle$ をかけた時

$$\langle a | \partial_\nu F_{\nu\mu}(x) | b \rangle = -4\pi \langle a | j_\mu(x) | b \rangle \quad (2-12)$$

$$\langle a | D_\mu(\partial) B(x) | b \rangle = 0 \quad (2-13)$$

を満たさなければならない。ゲージ条件は演算子の間で満足している。Maxwell 方程式が物理的状態での期待値の意味で成立するためには, 更に(2-13)式の補助条件が必要なのである。つまり, 状態空間としては観測可能な空間を含む, より大きな空間で議論を進め, 観測量を取り出す際には, 観測可能空間へ投影するという方法を用いるわけである。

§ 2.2 Functional Integral Formalism

これまで物理量を裸の粒子の場 $\varphi_\uparrow(x)$, $\varphi_\downarrow(x)$, $A_\mu(x)$, $B(x)$ などの Heisenberg 場で記述してきたが, 相互作用のほとんどない物理学的粒子の場で書き換える。これを dynamical map という。これを行うためには多点関数間の関係式, つまり様々なタイプの Ward-Takahashi の関係式(W-Tの関係式)を求める必要がある。W-Tの関係式を導く最も手軽な方法は, Functional Integral Formalism を用いる方法である。

電子の場を

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow(x) \\ \varphi_\downarrow(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi^+(x) = (\varphi_\uparrow^*(x), \varphi_\downarrow^*(x)) \quad (2-14)$$

とスピノルで表現する。これからは超伝導状態を仮定するので, BCS 秩序パラメーターを作る場

$$\phi(x) = \varphi_{\uparrow}(x) \varphi_{\downarrow}(x) \quad (2-15)$$

が存在することを想定する。 $\phi(x)$ から実の場

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi(x) + \phi^*(x)) \quad (2-16)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\phi(x) - \phi^*(x)) \quad (2-17)$$

を作る。結局、超伝導状態で考えられるHeisenberg 場は $\varphi(x)$, $A_{\mu}(x)$, $B(x)$, $\phi(x)$, $\chi(x)$ である。それぞれの場の source と呼ばれるパラメーターを導入する。 $\varphi^+(x)$ の source を

$$\eta(x) = \begin{pmatrix} \eta_{\uparrow}(x) \\ \eta_{\downarrow}(x) \end{pmatrix}, \quad \varphi(x) \text{ の source を } \eta^+(x) = (\eta_{\uparrow}^*(x), \eta_{\downarrow}^*(x)) \text{ と導入する。 } A_{\mu}(x),$$

$\phi(x)$, $\chi(x)$ のそれぞれの source を $J_{\mu}(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ と導入する。 $A_{\mu}(x)$, $\phi(x)$, $\chi(x)$ と sources $J_{\mu}(x)$, $K_1(x)$, $K_2(x)$ は c -数として, Functional Integral を次式で定義する。ただし $\phi(x)$, $\phi^+(x)$, $\eta(x)$, $\eta^+(x)$ は反交換関係を満たすものとする。

$$\begin{aligned} W[\eta, J, K] \equiv & \frac{1}{N} \int [dA_{\mu} \cdots] \exp \{ i \int d^4x [L(x) - B(x) D_{\mu}(\partial) A_{\mu}(x) \\ & + \eta^+(x) \varphi(x) + \varphi^+(x) \eta(x) + J_{\mu}(x) A_{\mu}(x) + K_1(x) \phi(x) \\ & + K_2(x) \chi(x) - \varepsilon \phi(x)] \} \end{aligned} \quad (2-18)$$

ここで $[dA_{\mu} \cdots]$ は $[dA_{\mu}] [d\varphi_{\uparrow}] [d\varphi_{\downarrow}] [d\varphi_{\uparrow}^*] [d\varphi_{\downarrow}^*] [dB]$ であり, 汎関数積分の体積素を意味する。 $\varepsilon \phi(x)$ の項は対称性を破る項で, 強磁性体において磁化の方向を決めるために導入される弱い磁場と同じ役割を持ち, 秩序状態を導き出すために付け加えられた項である。計算の最後で, $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとる。 N は規格化定数で $N = W[\eta = \eta^+ = J_{\mu} = K_1 = K_2 = \varepsilon = 0]$ である。

汎関数 $F[\varphi, A_{\mu}, B]$ の平均量を

$$\begin{aligned} \langle F[\varphi, A_{\mu}, B] \rangle_{\varepsilon, \eta, J, K} \equiv & \frac{1}{N} \int [dA_{\mu} \cdots] F[\varphi, A_{\mu}, B] \\ & \times \exp \{ i \int d^4x [L(x) - B(x) D_{\mu}(\partial) A_{\mu}(x) \\ & + \eta^+(x) \varphi(x) + \varphi^+(x) \eta(x) + J_{\mu}(x) A_{\mu}(x) \\ & + K_1(x) \phi(x) + K_2(x) \chi(x) - \varepsilon \phi(x)] \} \end{aligned} \quad (2-19)$$

で定義する。sources ϵ, η, J, K のうちに 0 のものがあれば、その添字は落すことにする。

例えば、

$$\langle F[\varphi, A_\mu, B] \rangle_{\epsilon, \eta, J} \equiv \langle F[\varphi, A_\mu, B] \rangle_{\epsilon, \eta, J, K=0}$$

である。

この Functional Integral を用いて、Heisenberg 場の関数の基底状態に於ける期待値を表すことができる。つまり、次の公式が成り立つ。

$$\langle 0 | T F[\varphi_H, A_{\mu H}, B_H] | 0 \rangle_\epsilon = \langle F[\varphi, A_\mu, B] \rangle_\epsilon \quad (2-20)$$

$|0\rangle$ は基底状態の状態ベクトルであり、 $\varphi_H, A_{\mu H}, B_H$ は裸の粒子の Heisenberg オペレーターであり、 T は時間順序オペレーターである。Heisenberg 場の期待値が c -数の Functional Integral により計算できることを示している。この公式は、R. P. Feynman, J. Schwinger, K. Symanzik, H. Umezawa and A. Visconti らにより証明されている⁴⁻⁸⁾。

§ 2.3 Ward-Takahashi の関係式

Functional Integral Formalism の方法を用いて Ward-Takahashi の関係式 ($W-T$ の関係式) を導く。 $W-T$ の関係式を求めるには、Functional Integral $W[\eta, J, K]$ において、変数 $\varphi(x)$, $A_\mu(x)$ につき Q -変換と呼ばれる変数変換を施す。単なる変数変換は積分を変えないから、 $W[\eta, J, K]$ は不変で $\delta W[\eta, J, K] = 0$ である。この関係から $W-T$ の関係式が導かれる。

位相変換 $\varphi(x) \rightarrow e^{i\theta} \varphi(x)$ を施す。この変換に関しては total Lagrangian 密度 $L_{\text{tot}}(x) = L(x) - B(x) D_\mu(\partial) A_\mu(x)$ は不変である。 θ が微少量として展開すると、

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\rightarrow (1 + i\theta) \varphi(x) \\ \varphi^+(x) &\rightarrow (1 - i\theta) \varphi^+(x) \end{aligned} \quad (2-21)$$

となる。超伝導の秩序パラメーター $\phi(x)$ は、この変換によって

$$\phi(x) \rightarrow (1 + 2i\theta) \phi(x)$$

となるから、 $\phi(x)$ の実部、虚部はそれぞれ、

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi(x) - 2\theta \chi(x) \\ \chi(x) &\rightarrow \chi(x) + 2\theta \phi(x) \end{aligned} \quad (2-22)$$

なる変換を受ける。これらの変換式を $W[\eta, J, K]$ の定義式に代入し、 $L_{\text{tot}}(x)$ の不変性に注意して指数関数部分を θ の 1 次まで展開する。

$$W[\eta, J, K] = W'[\eta, J, K] + 2\theta \int d^4x \left\langle \frac{i}{2} (\eta^+(x) \varphi(x) - \varphi^+(x) \eta(x)) \right\rangle$$

$$-K_1(x) \chi(x) + K_2(x) \phi(x) + \varepsilon \chi(x) >_{\varepsilon, \eta, J, K}$$

積分の体積素 $[dA_\mu \cdots]$ の中には, $d\varphi_\uparrow$ と $d\varphi_\downarrow^+$, $d\varphi_\downarrow$ と $d\varphi_\uparrow^+$ とが対になって入っているから, 位相変換を行っても $[dA_\mu \cdots]$ は不変であり,

$$W[\eta, J, K] = W'[\eta, J, K]$$

が成り立つ。従って

$$\begin{aligned} \int d^4x < \frac{i}{2} (\eta^+(x) \varphi(x) - \varphi^+(x) \eta(x) + K_2(x) \phi(x) - K_1(x) \chi(x)) >_{\varepsilon, \eta, J, K} \\ = -\varepsilon \int d^4x < \chi(x) >_{\varepsilon, \eta, J, K} \end{aligned} \quad (2-23)$$

なる, 位相変換からくる $W-T$ の関係式が導かれる。

ゲージ変換について同様の計算を実行すると, 更に別の $W-T$ の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \int d^4x < \frac{i}{2} \frac{e}{\hbar c} \{ \eta^+(x) \varphi(x) - \varphi^+(x) \eta(x) \} - \frac{1}{2} B(x) D(\partial) + \frac{1}{2} J_\mu(x) \partial_\mu \\ + \frac{e}{\hbar c} \{ K_2(x) \phi(x) - K_1(x) \chi(x) \} >_{\varepsilon, \eta, J, K} \lambda(x) \\ = -\frac{e}{\hbar c} \varepsilon \int d^4x < \chi(x) >_{\varepsilon} \lambda(x) \end{aligned} \quad (2-24)$$

ここで

$$D(\partial) = \partial_\mu D_\mu(\partial) \quad (2-25)$$

である。(2-24) 式の両辺に偏分 $\delta/\delta\lambda(y)$ をとり,

$$\frac{\delta\lambda(x)}{\delta\lambda(y)} = \delta(x-y)$$

を用いる。また, 微分演算子を含んでいる項については部分積分を行う。更に $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限をとると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \int d^4x < \frac{i}{2} \frac{e}{\hbar c} \{ \eta^+(x) \varphi(y) - \varphi^+(y) \eta(x) \} - \frac{1}{2} D(\partial) B(x) - \frac{1}{2} \partial_\mu J_\mu(x) \\ + \frac{e}{\hbar c} \{ K_2(x) \phi(y) - K_1(x) \chi(y) \} >_{\eta, J, K} \delta(x-y) = 0 \end{aligned} \quad (2-26)$$

(2-23), (2-26) 式が位相変換不変性, ゲージ変換不変性に関する情報を含んだ基本的な

$W-T$ の関係式だが, source のパラメーターで何度も汎関数微分することにより, 無数の $W-T$ の関係式が導かれる。

(2-23) 式を $K_2(y)$ で汎関数微分を行い, $\eta, J, K \rightarrow 0$ の極限をとる。左辺は $\langle \phi(y) \rangle_\epsilon$ になる。右辺では Functional Integral の定義式と照し合わせると, 指数関数部分から $\chi(y)$ が現われて

$$\langle \phi(y) \rangle_\epsilon = -i \epsilon \int d^4 x \langle \chi(x) \chi(y) \rangle_\epsilon \quad (2-27)$$

を得る。同様に, (2-26) 式の両辺に汎関数微分 $\delta / \delta K_2(y)$ をとり, 極限 $\epsilon, \eta, J, K \rightarrow 0$ をとると, 次式を得る。

$$i D(\partial^x) \langle B(x) \chi(y) \rangle = \frac{2e}{\hbar c} \langle \phi(y) \rangle \delta(x-y) \quad (2-28)$$

超伝導状態が BCS 状態だとし, 秩序パラメーターを

$$v \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle \phi(x) \rangle_\epsilon \quad (2-29)$$

で定義すると, (2-27), (2-28) 式は書き直されて

$$v = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \epsilon \int d^4 y \langle \chi(x) \chi(y) \rangle_\epsilon \quad (2-27)'$$

$$i D(\partial^x) \langle B(x) \chi(y) \rangle = \frac{2e}{\hbar c} v \delta(x-y) \quad (2-28)'$$

になる。(2-23), (2-26) 式を他の source パラメーターで微分することにより, 更に別の $W-T$ の関係式を得る。このようにして得られる $W-T$ の関係式のうち, dynamical map を行う際に必要なものを挙げておく。

$$\langle B(x) B(y) \rangle = 0 \quad (2-30)$$

$$D_\mu(\partial^x) \langle A_\mu(x) \chi(y) \rangle = 0 \quad (2-31)$$

$$D(\partial^x) \langle B(x) A_\mu(x) \rangle = i \partial_\mu^x \delta(x-y) \quad (2-32)$$

$$D_\mu(\partial^x) \langle A_\mu(x) A_\nu(y) \rangle = 0 \quad (2-33)$$

§ 2.4 Dynamical map

前節に得られた $W-T$ の関係式を使って, 準粒子を求めていく。まず, 秩序パラメーターの虚部の場合 $\chi(x)$ に含まれる準粒子がどのような性質を持っているか調べよう。 $\chi(x)$ がボゾン的一粒子励起を持っていると仮定すると, $\chi(x)$ の Green 関数は

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T \chi_H(x) \chi_H(y) | 0 \rangle &= \langle \chi(x) \chi(y) \rangle_\varepsilon \\
&= i (2\pi)^{-4} \int d^4 p \exp \{ i [-p_0 (t_x - t_y) + \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})] \} \\
&\quad \times D_\chi(p_0, \vec{p}, \varepsilon)
\end{aligned} \tag{2-34}$$

とスペクトル表示で表わすことができる。ここに

$$D_\chi(p_0, \vec{p}, \varepsilon) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{Z_\chi(p^2)}{(p_0^2/c^2) - \omega^2(\vec{p}) + \varepsilon a(p^2) + i\alpha} + \dots \tag{2-35}$$

であり、 $p^2 = \vec{p}^2$ で、(2-35) 式中の……は、cut-singularityを持つ項を表す。 $\omega(\vec{p})$ は $\varepsilon = 0$ の時の一粒子状態のエネルギーで、 $\varepsilon a(p^2)$ は Functional Integral $\mathcal{W}[\eta, J, K]$ の中に対称性を破る項 $\varepsilon \phi(x)$ を含めたために生じた自己エネルギーである。 $Z_\chi(p^2)$ はスペクトル強度を表わし、運動量 \vec{p} の励起状態を $|s, \vec{p}\rangle$ とすると

$$Z_\chi(p^2) = \frac{2\omega(p)}{c^2} \sum_s |\langle 0 | \chi | s, \vec{p} \rangle|^2 \tag{2-36}$$

である。一粒子状態が存在しない時には、

$$Z_\chi(p^2) = 0$$

となる。(2-34)、(2-35) 式を(2-27)' 式に代入して変形を行うと次式を得る。

$$\begin{aligned}
v &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int d^4 y \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp [-i p_0 (t_x - t_y) + i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})] \\
&\quad \times D_\chi(p_0, \vec{p}, \varepsilon) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \frac{Z_\chi(0)}{-\omega^2(0) + \varepsilon a(0) + i\alpha}
\end{aligned} \tag{2-37}$$

超伝導状態になっている時、つまり $v \neq 0$ についてこの極限操作を実行すると

$$v = Z_\chi(0)/a(0) \neq 0$$

$$\omega(0) = 0$$

が満たされなければならないことが示される。これにより、 $\chi(x)$ にはエネルギーギャップのない準粒子の一粒子状態が含まれることがわかる。この粒子が、系が超伝導状態に転移して生じた Goldstone boson である。

そこで

$$\omega^2(\vec{p}) = \frac{v_B^2(\vec{p})}{c^2} \vec{p}^2 \quad (2-38)$$

とおき, この Goldstone boson の場を $\chi^0(x)$ と表わす。 $\chi^0(x)$ は次の自由場の方程式を満足する。

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + v_B^2(\partial) \nabla^2 \right) \chi^0(x) = 0 \quad (2-39a)$$

更に, 正準形式に従って $\chi^0(x)$ のノルムを定めることにする。

$$\left[\chi^0(x), \frac{1}{c} \frac{\partial \chi^0(y)}{\partial t_y} \right] \delta(t_x - t_y) = i \delta^{(4)}(x - y) \quad (2-39b)$$

これらの関係式から $\chi^0(x)$ の Green 関数の運動方程式を求めると,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v_B^2(\partial)}{c^2} \nabla^2 \right) \langle 0 | T \chi^0(x) \chi^0(y) | 0 \rangle \\ = i \delta^{(4)}(x - y) \end{aligned} \quad (2-40)$$

である。Fourier 変換してスペクトル表示に直すと

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \chi^0(x) \chi^0(y) | 0 \rangle &= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 p \exp[-i p_0(t_x - t_y)] \\ &\quad + i \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) \Big] \times \frac{1}{(p_0^2/c^2) - \omega^2(\vec{p}) + i\alpha} \end{aligned} \quad (2-41)$$

となる。(2-34)式で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとったものと, (2-41)式を比較すると, 結局 Heisenberg 場 $\chi_H(x)$ は準粒子の自由場 $\chi^0(x)$ を使って

$$\chi_H(x) = Z_\chi^{1/2}(\partial) \chi^0(x) + \dots \quad (2-42)$$

と書ける。……は準粒子の高次の normal products を表わしている。このようにして秩序パラメーターの虚部の場 $\chi_H(x)$ は, ほとんど自由な Goldstone boson の場 $\chi^0(x)$ に dynamical map された。

次に, 場 $B(x)$ の dynamical map を求めよう。Heisenberg 方程式 (2-8) の両辺に ∂_μ を作用させる。

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\nu\mu}(x) = -4\pi \partial_\mu j_\mu(x) - \partial_\mu D_\mu(\partial) B(x) \quad (2-43)$$

$F_{\nu\mu}(x)$ の反対称性より

$$\partial_\mu \partial_\nu F_{\nu\mu}(x) = 0$$

であり、また、連続の方程式

$$\partial_\mu j_\mu(x) = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \rho(x)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x) \right) = 0$$

を用いると、(2-43) 式は

$$D(\partial) B(x) = 0 \quad (2-44)$$

となる。つまり $B(x)$ は自由な場であることを意味している。 $W-T$ の関係式 (2-28)' と

dynamical map (2-42) 式とから、場 $B(x)$ は $-\frac{2ev}{\hbar c} Z_\chi^{-1/2}(\partial) \chi^0(x)$ を含んでいることがわか

る。それぞれを (2-28)' 式に代入すると

$$D(\partial^2) \langle \chi^0(x) \chi^0(y) \rangle = i \delta(x-y) \quad (2-45)$$

が導かれる。これは Goldstone boson 関数の満たすべき運動方程式であり、(2-40) 式と両立するには

$$D(\partial) = \partial_\mu D_\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v_B^2(\partial)}{c^2} \nabla^2 \quad (2-46)$$

を満足しなければならない。従ってこれまで不定であった $D_\mu(\partial)$ が、

$$D_\mu(\partial) = (\partial_0, v_B^2(\partial)/c^2 \partial_i) \quad (2-47)$$

と定まる。ゲージ条件は系が超伝導になっていると一意的に定まって、Coulomb gauge とも Lorentz gauge と異なるゲージとなる。このゲージを phason gauge と呼んでいる。

$W-T$ の関係式 (2-30) は、 $B(x)$ がノルムを持たないことを示している。このことは $B(x)$ が何か $\chi^0(x)$ 以外の準粒子を含んでいることを示唆している。この準粒子を $b^0(x)$ と書き $B(x)$ の Dynamical map を

$$B_H(x) = \frac{2ev}{\hbar c} Z_\chi^{-1/2}(\partial) (b^0(x) - \chi^0(x)) \quad (2-48)$$

と表す。(2-44) 式に (2-48) 式を代入して (2-38) 式を用いると

$$D(\partial) b^0(x) = 0 \quad (2-49)$$

が成り立ち、 $b^0(x)$ も自由な場である。 $B(x)$ は自由場であったので、(2-48) 式で示される以外の高次の normal products は存在しない。

(2-48) 式を (2-30) 式に代入すると

$$\langle b^0(x) b^0(y) \rangle = -\langle \chi^0(x) \chi^0(y) \rangle = -i \delta^{(4)}(x-y) \quad (2-50)$$

となり、 $b^0(x)$ は負のノルムを持ち、確率解釈はできなくなる。それで $b^0(x)$ を ghost 場と呼ぶ。このような ghost を導入しないと理論は一貫しない。実際の物理空間に ghost が現われては困るので、閉じ込めがなされる。観測可能な物理状態を $|\text{phys}\rangle$ と書くと、 $b^0(x)|\text{phys}\rangle$ は観測にかからない非物理的状态になり、 $|\text{phys}\rangle$ の状態とは直交していると考えるのである。この事情は Q. E. D. の理論と同様である。

次に $A_\mu(x)$ の dynamical map を求める。(2-31) 式の $W-T$ の関係式から、 $A_\mu(x)$ には Goldstone boson $\chi^0(x)$ を含まないことがわかる。もし含めば (2-31) 式の右辺は 0 でなくなるからである。更に (2-32) 式の $W-T$ の関係式が成り立つには、 $A_\mu(x)$ は ghost 場の一階微分を含まなければならない。

$$A_{\mu H}(x) = \frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) \partial_\mu b^0(x)$$

とおけば (2-32) 式を満足することが示される。 $A_\mu(x)$ に関する $W-T$ の関係式 (2-33) 式を満たすには、 $A_\mu(x)$ には $\partial_\mu b^0(x)$ 以外の場合が必要である。その場を $U_\mu^0(x)$ と書くと、電磁ベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ の dynamical map は

$$A_{\mu H}(x) = \frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) \partial_\mu b^0(x) + U_\mu^0(x) + \dots \quad (2-51)$$

となる。自由空間では $A_\mu(x)$ は光子であるが、金属中に入ると電子やホールを励起して、光子は電子、ホールの衣を着て有効質量を持つようになる。 $U_\mu^0(x)$ はこのベクトル準粒子、つまりプラズモンを表わしている。

$U_\mu^0(x)$ の性質を調べよう。系の Lagrangian 密度を

$$L_{\text{tot}}(x) = L_e(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) + 4\pi J_\mu(x) A_\mu(x) - B(x) D_\mu(\partial) A_\mu(x) \quad (2-52)$$

とおく。 $L_e(x)$ は電子系の Lagrangian 密度で、ベクトルポテンシャルは含んでいない。電子と電磁場の相互作用は、(2-52) 式の第 3 項のように電流とベクトルポテンシャルの積で表わしてある。ここで裸のベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ を、電子やホールの衣を着て繰り込まれたもの $A_\mu^{(r)}(x)$ で表現する。

$$A_\mu(x) = Z_\ell^{1/2}(\partial) A_\mu^{(r)}(x) \quad (2-53)$$

$Z_\ell(\partial)$ は繰り込み定数である。(2-52) 式に (2-53) 式を代入すると Lagrangian 密度は次のように書き換えられる。

$$L_{\text{tot}}(x) = L_e(x) - \frac{Z_\ell(\partial)}{4} F_{\mu\nu}^{(r)}(x) F_{\mu\nu}^{(r)}(x) + 4\pi Z_\ell^{1/2}(\partial) J_\mu(x) A_\mu^{(r)}(x) - Z_\ell^{1/2}(\partial) B(x) D_\mu(\partial) A_\mu^{(r)}(x) \quad (2-54)$$

ここで

$$F_{\mu\nu}^{(r)}(x) = \partial_\mu A_\nu^{(r)}(x) - \partial_\nu A_\mu^{(r)}(x)$$

である。繰り込まれたベクトルポテンシャル $A_\mu^{(r)}(x)$ について変分をとると、Euler方程式

$$\delta L_{\text{tot}}(x) / \delta A_\mu^{(r)}(x) - \partial_\nu \delta L_{\text{tot}}(x) / \delta (\partial_\nu A_\mu^{(r)}(x)) = 0$$

より、次式が成り立つ。

$$4\pi Z_\ell^{1/2}(\partial) J_\mu(x) + Z_\ell^{1/2}(\partial) D_\mu(\partial) B(x) + Z_\ell(\partial) \partial_\nu F_{\nu\mu}^{(r)}(x) = 0 \quad (2-55)$$

$A_\nu^{(r)}(x)$ は電子、ホールの衣を着て有効質量を持つから、(2-55)式は

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_{\nu\mu}^{(r)}(x) - m_{\mu\nu}^2(\partial) A_\nu^{(r)}(x) &= -m_{\mu\nu}^2(\partial) A_\nu^{(r)}(x) \\ &+ (1 - Z_\ell(\partial)) \partial_\nu F_{\nu\mu}^{(r)}(x) - 4\pi Z_\ell^{1/2}(\partial) J_\mu(x) \\ &- Z_\ell^{1/2}(\partial) D_\mu(\partial) B(x) \end{aligned} \quad (2-56)$$

と変形できる。ここに $m_{\mu\nu}^2(\partial)$ は $A_\nu^{(r)}(x)$ の有効質量である。有効質量を持った光子の従う方程式は、(2-56)式の左辺=0で与えられる。(2-56)式の右辺=0とすることができれば、質量繰り込みが可能ということになるが、ここではそれを仮定する。

プラズモンの従う方程式は(2-56)式の左辺を0とおいたもので、 $F_{\nu\mu}^{(r)}(x)$ の定義式を代入して両辺から $Z_\ell^{1/2}(\partial)$ をかけると

$$(\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu - m_{\mu\nu}^2(\partial)) A_\nu(x) = 0 \quad (2-57)$$

と書ける。ここに

$$g_{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \quad (2-58)$$

であり、 I は3行3列の単位行列である。ここで考えている $A_\nu(x)$ はプラズモンであるから(2-51)式の $U_\nu^0(x)$ の部分である。そこで(2-57)式を次のように書く。

$$A_{\mu\nu}(\partial) U_\nu^0(x) = 0 \quad (2-59)$$

ただし

$$A_{\mu\nu}(\partial) = \partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu - m_{\mu\nu}^2(\partial) \quad (2-60)$$

である。

(2-56) 式の右辺を 0 とおいたものから、質量 $m_{\mu\nu}(\partial)$ が既知の場合は、電流密度に対する表現が得られる。

$$4\pi J_\mu(x) = -m_{\mu\nu}^2(\partial) U_\nu^0(x) + (Z_\nu^{-1}(\partial) - 1) A_{\mu\nu}(\partial) U_\nu^0(x) - D_\mu(\partial) B(x) \quad (2-61)$$

$B(x)$ に (2-48) 式を代入すると、(2-61) 式は電流密度 $J_\mu(x)$ を物理的粒子で表現したことになる。即ち $J_\mu(x)$ の Dynamical map が得られた。

(2-59) 式を用いてプラズモン $U_\nu^0(x)$ の性質を調べる。 $U_\nu^0(x)$ はベクトル場であるから、一般に縦成分と横成分に分けられ、 $U_\nu^0(x)$ の時間成分 $U_0^0(x)$ は縦成分に含めることができる。縦成分 $U_\mu^{0\ell}(x)$ 、横成分 $U_\mu^{0t}(x)$ を次式で定義する。

$$U_\mu^{0\ell}(x) = (U_0^0(x), U_1^{0\ell}(x), U_2^{0\ell}(x), U_3^{0\ell}(x)) \quad (2-62)$$

$$U_\mu^{0t}(x) = (0, U_1^{0t}(x), U_2^{0t}(x), U_3^{0t}(x)) \quad (2-63)$$

各成分の空間部分についての条件は次の通りである。

$$\vec{U}^0(x) = \vec{U}^{0\ell}(x) + \vec{U}^{0t}(x) \quad (2-64)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{U}^{0\ell}(x) = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{U}^{0t}(x) = 0 \quad (2-65)$$

このような縦、横成分を取り出す演算子を定義しておくとも便利である。横成分を取り出す射影演算子を次の行列で定義する。

$$L_{\mu\nu}^t = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \delta_{ij} - \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j \end{array} \right) \quad (2-66)$$

縦成分を取り出す射影演算子は

$$L_{\mu\nu}^\ell = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & \partial_i \frac{1}{\nabla^2} \partial_j \end{array} \right) \quad (2-67)$$

で定義する。この演算子を使うと $U_\nu^0(x)$ の構成成分 $U_\nu^{0t}(x)$ は $L_{\mu\nu}^t U_\nu^0(x)$ で表わされ、縦成分 $U_\nu^{0\ell}(x)$ は $L_{\mu\nu}^\ell U_\nu^0(x)$ で表わされる。

超伝導状態ではゲージ条件は固定されて、phason gauge を用いている。phason gauge の定義式

$$D_\mu(\partial) A_\mu(x) = 0$$

に dynamical map (2-51) 式を代入すると

$$D_\mu(\partial) \left[\frac{\hbar c}{2ev} Z_\chi^{1/2}(\partial) \partial_\mu b^0(x) \right] + D_\mu(\partial) U_\mu^0(x) = 0 \quad (2-68)$$

となる。第一項には $D_\mu(\partial) \partial_\mu b^0(x) = D(\partial) b^0(x)$ という因子が含まれているが、これは ghost の運動方程式 (2-49) 式により 0 である。従ってプラズモン $U_\mu^0(x)$ も phason gauge を満たす。

$$D_\mu(\partial) U_\mu^0(x) = 0 \quad (2-69)$$

さて (2-59) 式を縦、横プラズモンの式に分解しよう。まず有効質量 $m_{\mu\nu}(\partial)$ が 0 の場合を考えよう。すなわち

$$A_{\mu\nu}^0(\partial) = \partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu$$

である。phason gauge の条件 (2-69) 式を用いると

$$A_{0\nu}^0(\partial) U_\nu^0(x) = \frac{c^2}{v_B^2(\partial)} D(\partial) U_0^0(x) \quad (2-70)$$

$$A_{i\nu}^0(\partial) U_\nu^0(x) = \left\{ \partial^2 \delta_{ij} - \left(1 - \frac{v_B^2(\partial)}{c^2} \right) \partial_i \partial_j \right\} U_j^0(x) \quad (2-71)$$

と変形できる。縦、横プラズモン $U_\mu^{0l}(x)$, $U_\mu^{0t}(x)$ の定義式で表わすと

$$A_{0\nu}^0(\partial) U_\nu^0(x) = - \frac{c^2}{v_B^2(\partial)} D(\partial) U_0^{0l}(x) \quad (2-70)'$$

$$A_{i\nu}^0(\partial) U_\nu^0(x) = \partial^2 U_i^{0t}(x) + D(\partial) U_i^{0l}(x) \quad (2-71)'$$

となる。従って有効質量が 0 の場合、各プラズモンはそれぞれ

$$D(\partial) U_\mu^{0l}(x) = 0 \quad (2-72)$$

$$\partial^2 U_\mu^{0t}(x) = 0 \quad (2-73)$$

なる方程式を満たすことがわかる。有効質量が 0 でない時、物理的に縦成分と横成分では有効質量が異なると考えられるから、それぞれ $m_l(\partial)$, $m_t(\partial)$ と書くと、各プラズモンの運動方程式は次式で与えられる。

$$(D(\partial) - m_l^2(\partial)) U_\mu^{0l}(x) = 0 \quad (2-74)$$

$$(\partial^2 - m_t^2(\partial)) U_\mu^{0t}(x) = 0 \quad (2-75)$$

(2-74), (2-75) 式を Fourier 変換して各プラズモンの分散関係を求める。 $\omega_l(\vec{p}^2)$,

$\omega_t(\vec{p}^2)$ を縦プラズモン、横プラズモンの振動数とすると、

$$\omega_l^2(\vec{p}^2) = c^2 \left(\frac{v_B^2(\vec{p})}{c^2} \vec{p}^2 + m_l^2(\omega_l, \vec{p}^2) \right) \quad (2-76)$$

$$\omega_l^2(\vec{p}^2) = c^2(\vec{p}^2 + m_l^2(\omega_l, \vec{p}^2)) \quad (2-77)$$

を得る。これらの結果は Bohm-Pines による計算と一致する。

$\vec{p}=0$ では縦プラズモンも横プラズモンも区別がないので、有効質量は等しく、

$$m_l^2(\vec{p}^2) = m^2(\vec{p}^2) \quad (2-78)$$

とおくと、横プラズモンの有効質量は

$$m_l^2(\vec{p}^2) = m^2(\vec{p}^2) + \vec{p}^2 \delta m^2(\vec{p}^2) \quad (2-79)$$

と書ける。この表式を用いると (2-74), (2-75) 式から

$$A_{\mu\nu}(\partial) = \partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu - m^2(-\nabla^2) \eta_{\mu\nu}(-\nabla^2) + \nabla^2 \delta m^2(-\nabla^2) L_{\mu\nu}^t \quad (2-80)$$

$$m_{\mu\nu}^2(\partial) = m^2(-\nabla^2) \eta_{\mu\nu}(-\nabla^2) - \nabla^2 \delta m^2(-\nabla^2) L_{\mu\nu}^t \quad (2-81)$$

$$\eta_{\mu\nu}(-\nabla^2) = \left(\begin{array}{c|c} -\left(\frac{c}{v_B(\partial)}\right)^2 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \quad (2-82)$$

と表わせることが確かめられる。

プラズモン $U_\mu^0(x)$ の Green 関数を

$$A_{\mu\nu}(x-y) \equiv \langle U_\mu^0(x) U_\nu^0(y) \rangle \quad (2-83)$$

で定義する。ベクトルポテンシャル $A_\mu(x)$ は (2-51) 式のように dynamical map されているが、一方 (2-53) 式よりプラズモンの場合は正しくは $Z_l^{-1/2}(\partial) U_\mu^0(x)$ ととるべきである。この量子化されたプラズモンの交換関係を用いると、プラズモンの Green 関数 $A_{\mu\nu}(x)$ は

$$A_{\mu\rho}(\partial) A_{\rho\nu}(x) = i Z_l(\partial) g_{\mu\nu} \delta(x) \quad (2-84)$$

を満足しなければならない。また

$$\partial_\mu A_{\mu\nu}(\partial) = -m^2(-\nabla^2) \partial_\mu \eta_{\mu\nu}(-\nabla^2) = -m^2(-\nabla^2) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} D_\nu(\partial) \quad (2-85)$$

を用いると、(2-84) 式の両辺に左側から ∂_μ をかけた式は

$$D_\rho(\partial) A_{\rho\nu}(x) = -i \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^2 m^{-2}(-\nabla^2) Z_l(\partial) \partial_\nu \delta(x) \quad (2-86)$$

になる。一方、 $W-T$ の関係式 (2-33) に dynamical map (2-51) 式を代入して得られるプラズモンの Green 関数の運動方程式は

$$D_\rho(\partial) A_{\rho\nu}(x) = -i \left(\frac{\hbar c}{2ev} \right)^2 Z_\chi(\partial) \partial_\nu \delta(x) \quad (2-87)$$

である。(2-86)式と(2-87)式は、ともにプラズモンの Green 関数の運動方程式で、両立しなければならないから

$$m^2(-\nabla^2) = \left(\frac{2ev}{\hbar c} \right)^2 Z_\chi^{-1}(\partial) Z_l(\partial) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^2 \quad (2-88)$$

が成り立つ。この式は2つの繰り込み定数の間には関係があることを示していて、例えば Goldstone boson $\chi^0(x)$ の繰り込み定数 $Z_\chi(\partial)$ は、プラズモンの質量 $m^2(-\nabla^2)$ を媒介にして、プラズモンの繰り込み定数 $Z_l(\partial)$ から得られることがわかる。

§ 2.5 ホゾン変換

前節では様々な物理量を準粒子によって記述した。この節では、準粒子で記述された系から古典的に振舞う巨視的量を求めるボゾン変換と呼ばれる方法を説明する。

古典的ということは量子論的ゆらぎがみえなくなることである。ある量子数 n を考えると、 $\hbar n$ の量子論的ゆらぎは $\hbar \Delta n$ である。古典論は

$$\frac{\hbar \Delta n}{\hbar n} = \frac{\Delta n}{n} \rightarrow 0$$

という極限にあたっているので、 Δn を極めて小さくするか、 n を極めて大きくすればよい。量子数 n が Bose 粒子の量子数である場合には、Bose 凝縮によって n を極めて大きくできる。秩序状態では必ず gapless の Goldstone boson が存在するので、この凝縮によっても古典的な巨視量をつくることができる。

超伝導の場合にも、(2-37)式以下でみたように、波数 $q=0$ でエネルギー $\omega=0$ となる Goldstone boson $\chi^0(x)$ が存在する。この Goldstone boson の凝縮した状態が超伝導状態である。しかしながら、この $\chi^0(x)$ は観測にかからない。というのは、物理的状态の条件(2-13)式は、dynamical map(2-48)式を代入すると

$$\langle \text{phys} | D_\mu(\partial) (b^0(x) - \chi^0(x)) | \text{phys} \rangle = 0 \quad (2-89)$$

と書き換えられる。(2-50)式以下の事情から ghost $b^0(x)$ は観測にかからない場であり

$$\langle \text{phys} | b^0(x) | \text{phys} \rangle = 0$$

であるから、(2-89)式より

$$\langle \text{phys} | \chi^0(x) | \text{phys} \rangle = 0$$

が成り立つ。すなわち $\chi^0(x)$ も $b^0(x)$ と同様に、観測可能な状態には励起されないことがわかる。このように Goldstone boson $\chi^0(x)$ は観測にはかからないが、凝縮を起こすことができ、その結果、超伝導系のさまざまな状態、例えば渦系状態を作る原因となるのである。

そこで、観測可能な巨視的現象を記述するため、ボゾン変換を次のように定義する。

$$\chi^0(x) \rightarrow \chi^0(x) + \frac{\hbar c}{e} m (-\nabla^2) Z_l^{-1/2}(\partial) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-1} f(x) \quad (2-90)$$

$$U_\mu^0(x) \rightarrow U_\mu^0(x) + a_\mu(x) \quad (2-91)$$

ここで、 $f(x)$ 、 $a_\mu(x)$ は c -数の関数であり、凝縮のために生じた巨視的部分を表す。 $\chi^0(x)$ 、 $U_\mu^0(x)$ はともに Bose 粒子であるから、 c -数を付け加えても交換関係は不変である。(2-90)、(2-91) のボゾン変換された後の c -数を含む Heisenberg 場も Heisenberg 方程式 (2-12)、(2-13) の解でなければならない。ボゾン変換は Heisenberg 方程式の一つの解から他の解へ移る変換である。 $f(x)$ の選び方にはある程度任意性があるが、変換前 $\chi^0(x)$ は (2-49) 式を満たしていたので、変換後も同じ式を満たすものとする。

$$D(\partial) f(x) = 0 \quad (2-92)$$

この方程式を満たす $f(x)$ は境界条件によって様々な型をとるが、それが物理系の様々な凝縮状態に対応している。

電流密度を準粒子で表現するには (2-61) 式に dynamical map (2-48) 式を代入すればよい。

$$\begin{aligned} 4\pi J_\mu(x) = & -m_{\mu\nu}^2(\partial) U_\nu^0(x) + (Z_l^{-1}(\partial) - 1) A_{\mu\nu}(\partial) U_\nu^0(x) \\ & - D_\mu(\partial) \frac{2ev}{\hbar c} Z_\chi^{-1/2}(\partial) (b^0(x) - \chi^0(x)) \end{aligned} \quad (2-93)$$

ボゾン変換 (2-90)、(2-91) を施し、基底状態で平均すると c -数以外の項はすべて 0 になり

$$\begin{aligned} 4\pi j_\mu(x) = & 4\pi \langle 0 | J_\mu(x) | 0 \rangle \\ = & -m_{\mu\nu}^2(\partial) a_\nu(x) + (Z_l^{-1}(\partial) - 1) A_{\mu\nu} a_\nu(x) \\ & + 2vm (-\nabla^2) Z_\chi^{-1/2}(\partial) Z_l^{-1/2}(\partial) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-1} D_\mu(\partial) f(x) \end{aligned} \quad (2-94)$$

を得る。関係式 (2-88) 式を使うと、

$$\begin{aligned} 4\pi j_\mu(x) = & -m_{\mu\nu}^2(\partial) a_\nu(x) + (Z_l^{-1}(\partial) - 1) A_{\mu\nu} a_\nu(x) \\ & + \frac{\hbar c}{e} m^2(-\nabla^2) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} Z_l^{-1}(\partial) D_\mu(\partial) f(x) \end{aligned} \quad (2-95)$$

立木 昌

と書き換えられる。基底状態にある系の従う Heisenberg 方程式は

$$\langle 0 | \partial_\nu F_{\nu\mu}(x) | 0 \rangle = -4\pi \langle 0 | J_\mu(x) | 0 \rangle \quad (2-96)$$

である。ボゾン変換後もこの方程式に従うという条件は、(2-96)式に(2-95)，(2-51)，(2-91)式を代入して

$$\begin{aligned} (\partial^2 g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu) a_\nu(x) &= m_{\mu\nu}^2(\partial) a_\nu(x) - (Z_l^{-1}(\partial) - 1) A_{\mu\nu}(\partial) a_\nu(x) \\ &\quad - \frac{\hbar c}{e} m^2(-\nabla^2) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} Z_l^{-1}(\partial) D_\mu(\partial) f(x) \end{aligned} \quad (2-97)$$

となり、整理して両辺に $Z_l(\partial)$ をかけると

$$A_{\mu\nu}(\partial) a_\nu(x) = -\frac{\hbar c}{e} m^2(-\nabla^2) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} D_\mu(\partial) f(x) \quad (2-98)$$

を得る。つまりベクトルポテンシャル $a_\mu(x)$ は $f(x)$ と(2-98)式のような微分方程式を通して関係しているのである。

ベクトルポテンシャル $a_\mu(x)$ は phason gauge の条件

$$D_\mu(\partial) a_\mu(x) = 0 \quad (2-99)$$

を満足している。このことは(2-98)式の両辺に左側から ∂_μ をかけて、(2-85)，(2-92)式を用いることにより

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_{\mu\nu}(\partial) a_\nu(x) &= -\left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} m^2(-\nabla^2) D_\nu(\partial) a_\nu(x) \\ &= -\frac{\hbar c}{e} m^2(-\nabla^2) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} \partial_\mu D_\mu f(x) \end{aligned} \quad (2-100)$$

と容易に示せる。ボゾン変換をしたあともう一つの条件式 $\langle \text{phys} | D_\mu(\partial) B(x) | \text{phys} \rangle = 0$ (2-13) も満足されている必要がある。 $B(x)$ に(2-48)式を代入し、 $\chi_\rho(x)$ に対して(2-90)式のボゾン変換を行うと $f(x)$ の項が出てきて(2-13)の条件を満足しないかに見える。しかし、ボゾン変換を行うことにより Heisenberg 方程式(2-8)そのものが変化を受け上述の項をちょうど打消す項が出てきて(2-13)の条件は自動的に満足されていることを示すことができる¹⁾。

超伝導状態での電流密度、電磁場その他の物理量はベクトルポテンシャル $a_\mu(x)$ と $f(x)$ によって記述されるので、 $a_\mu(x)$ ， $f(x)$ の関数形を定める(2-92)式と(2-98)式が、ボゾン理論を応用する際の基礎方程式である。

(2-98)式を使うと基底状態での電流密度は

$$4\pi j_\mu(x) = -(A_{\mu\nu}(\partial) + m_{\mu\nu}^2(\partial)) a_\nu(x) \quad (2-101)$$

と書ける。(2-81)式と関係式(2-98)を用いると

$$4\pi j_\mu(x) = \frac{\hbar c}{e} m^2(-\nabla^2) \left(\frac{v_B(\partial)}{c} \right)^{-2} D_\mu(\partial) f(x) \\ - m^2(-\nabla^2) \eta_{\mu\nu}(-\nabla^2) a_\nu(x) + \nabla^2 \delta m^2(-\nabla^2) L_{\mu\nu}^t a_\nu(x) \quad (2-102)$$

に変形され、更に(2-85)式を使って最終的に

$$4\pi j_\mu(x) = -m^2(-\nabla^2) \eta_{\mu\nu}(-\nabla^2) \left(a_\nu(x) - \frac{\hbar c}{e} \partial_\nu f(x) \right) \\ + \nabla^2 \delta m^2(-\nabla^2) a_\mu^t(x) \quad (2-103)$$

を得る。ところで秩序パラメーターに関して次式の成り立つことが証明されている。

$$\langle \varphi_\uparrow(x) \varphi_\downarrow(x) \rangle = |\langle \varphi_\uparrow(x) \varphi_\downarrow(x) \rangle| \exp(2if(x)) \quad (2-104)$$

つまり $f(x)$ は超伝導秩序パラメーターの位相の半分である。電流密度の式(2-103)には $f(x)$ は $\partial_\nu f(x)$ という形で入っている。これは位相の勾配が超伝導電流を引き起こすことを意味し、Josephson 効果を表わしている。

(2-103)式をもう少し簡単化する。(2-104)式の第2項、構成成分のベクトルポテンシャルからくる電流はスピン電流に相当することが示せるので、常磁性超伝導体を考える場合にはこの項は落とすことができる。また(2-103)式の0成分は電荷密度に関する式であるが、時間的変化が遅い場合問題にならないので、これからは(2-103)式の空間成分だけを問題にしよう。従って電流密度は

$$4\pi \vec{j}(x) = -m^2(-\nabla^2) \left(\vec{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} f(x) \right) \quad (2-105)$$

と書ける。 $m(-\nabla^2)$ は縦プラズモンの質量であった。波数が0のプラズモンの質量 $m(0)$ は、London 侵入度 λ_L の逆数に等しいから

$$m^2(-\nabla^2) = m^2(0) \frac{m^2(-\nabla^2)}{m^2(0)} = \frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \quad (2-106)$$

が成り立つ。ただし

$$c(-i\nabla) = m^2(-\nabla^2)/m^2(0) \quad (2-107)$$

である。結局、電流密度の表式は

$$4\pi \vec{j}(x) = -\frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \left(\vec{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} f(x) \right) \quad (2-108)$$

となる。Gauss 単位系では左辺の $\vec{j}(x)$ を $\vec{j}(x)/c$ で置き換えればよい。(2-108)式は非局所な方程式である。Fourier 分解することにより

$$c(-i\nabla)g(x) = \int c(x-y)g(y)dy \quad (2-109)$$

の成立することが確められる。ここに積分の中の $c(x)$ は $c(k)$ の Fourier 変換を示す。(2-109)を用いると(2-108)式は

$$4\pi\vec{j}(x) = -\frac{1}{\lambda_L^2} \int c(x-y) \left(\vec{a}(y) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} f(y) \right) dy \quad (2-110)$$

と積分表示にすることもできる。(2-110)式で $f(y)$ を落とし、 $c(x-y)$ を $\delta(x-y)$ にすれば London 方程式になる。特殊な $c(x-y)$ を使えば Pippard 方程式にすることもできる。実際の応用にはプラズマ質量 $m(-\nabla^2)$ の運動量依存性を計算して、 $c(-i\nabla)$ を求めておかなければならない。そのためには電子間相互作用の具体的な形を決めて近似計算しなければならない。BCS相互作用を仮定し、乱雑位相近似(R.P.A.)を用いて Goldstone boson の Bethe-Salpeter 方程式を解いて $c(x-y)$ を決定した結果は、Shapira, Shah and Umezawa (Physica 84B (1976) 213) に与えられている。コンピューターを用いた計算結果は以下に示す通りである。

$$c(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} c(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad (2-111)$$

$$c(p) = \exp \left\{ -\nu [\bar{p}/\kappa(t)]^\eta \right\} \quad (2-112)$$

$$\bar{p} = \lambda_L(t)p \quad (2-113)$$

$$t = T/T_c \quad (2-114)$$

$$\kappa(t) = \frac{1}{r(t)} \frac{\lambda_L(t)}{\lambda_L(0)} \kappa(0) \quad (2-115)$$

$$\nu = -0.4257 VN(0) + 0.559 \quad (2-116)$$

$$\eta = -0.7857 VN(0) + 2.207 \quad (2-117)$$

$$r(t) = 1 + at^n/(1-t)^m \quad (2-118)$$

$$a = -0.0536 VN(0) + 0.3719 \quad (2-119)$$

$$n = 0.3714 VN(0) + 3.846 \quad (2-120)$$

$$m = -0.0414 VN(0) + 0.556 \quad (2-121)$$

ここで $N(0)$ は Fermi 面での状態密度、 V は電子の BCS 相互作用の結合定数である。これらの結果は $0.2 \leq VN(0) \leq 0.4$ の場合について計算したものである。 η はほとんど温度に依存しておらず、近似的には 2 に等しい。従って $c(p)$ の大体の形は Gauss 形であり、 p がコヒーレ

ントの長さ ξ の逆数程度になると減衰する。

超伝導状態と常伝導状態との違いは、プラズマ質量 $m(\partial)$ の振動数 ω 依存性の相違から起こる。常伝導の場合には、 $\omega \rightarrow 0$ の極限では m は 0 になり、(2-108) 式から電流が流れなくなる。これに対し超伝導の場合には、 $\omega \rightarrow 0$ の極限でも m は有限にとどまり、ベクトルポテンシャル $\vec{a}(x)$ あるいは位相の勾配が存在すれば、超伝導電流が流れるのである。

3. 超伝導と磁性

§ 3.1 実験事実

超伝導も磁性も固体物理の中では、典型的な秩序状態である。この両方の秩序状態が共存できるかという問題は、昔から多くの人々により議論されてきた。最初は Ginzburg が、超伝導と強磁性の共存問題について、BCS 理論の現われた頃考察している。その後、Abrikosov-Gor'kov が超伝導体中に磁性不純物を入れていくと、超伝導の転移温度 T_c が下がり、ついには超伝導が消滅すると論じている。それなら超伝導体中に入れる磁性不純物の量を少なくすれば超伝導の転移温度 T_c をあまり下げず、また磁気秩序も出現するのではないかと考えられる。

このような考えに側った実験的研究が以前から行なわれている。その最も新しいものは、例えば CeRu₂ 系である。Ce は 4 価になり f 電子がなく非磁性的である。それに Gd などと少し入れると強磁性と超伝導の共存することが発見された。しかしこのような系は希釈合金なので、常に空間的不均一性が問題となり、強磁性と超伝導が同じ場所で共存しているか疑問が持たれていた。ところが最近 3 年程前に、超伝導と磁性の共存に関して確実な物質が発見された。その物質は、MRh₄B₄ である。ここで M は希土類元素で、Nd, Sm, Er, Tm, Yb, Lu などを含む。M を希土類元素で置き換えると、あるものでは反強磁性と超伝導が共存し、また別のものでは低温で強磁性も起こりうるということがわかっている。このような事実を発見したのは、カリフォルニア大学の Matthias と Maple のグループである。また、ほぼ同じ時期に Chevrel 化合物と呼ばれる物質、M_{1.0~1.2}Mo₆S₈ および M_{1.0~1.2}Mo₆Se₈ に、超伝導と磁性の共存するものがみつけれられた。M としては pb, Sn, Gd, Tb, Dy, Ho などである。これらの実験事実は、ジュネーブ大学の石川と Fisher によって発見された。例えば M として pd や Sn を入れると上部臨界磁場 H_{c_2} が 60 T と非常に高く、その意味でも注目をあびた。それ以後第 3 の物質が発見された。それは MRh_xSn_y 系 (M = Er, Tm) であり、この系は 7 つの相を持ち、第 II 番目の相が超伝導と磁性の共存する相である。これは最近、米国のベル研究所で発見された Stannide と呼ばれる物質である。これらの物質では磁性は希土類イオンが但うが、希土類イオンは規則格子上に配列している。それで同時に超伝導と磁性が出現しても空間的不均一性は問題になら

ず、完全に共存状態であると言える。

図2は MRh_4B_4 系でMをLaからLuまでの希土類元素で置き換えた時の状態変化を示す。

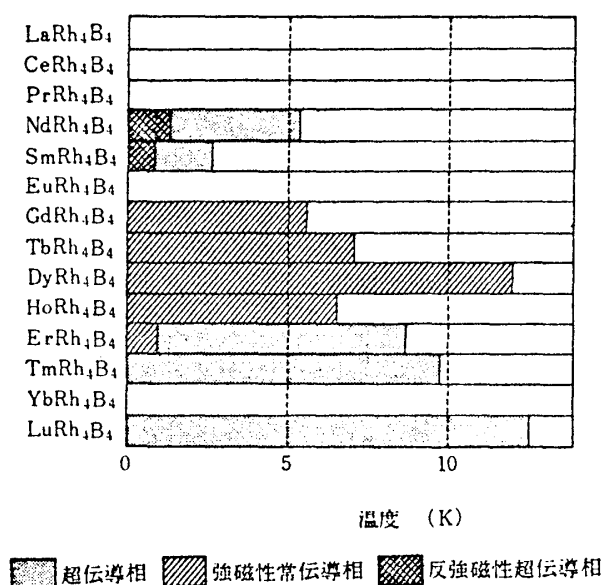


図2. $\text{RE Rh}_4\text{B}_4$ の状態変化

ただし、La, Ce, Pr, Eu, Yb は MRh_4B_4 化合物を作らない。Gd, Tb, Dy, Ho では超伝導を示さず強磁性を生ずる。Er Rh_4B_4 は比較的高い T_c で超伝導になるが、低温で強磁性になり超伝導は消滅する。Sm Rh_4B_4 や Nd Rh_4B_4 は低温で反強磁性と超伝導とが共存する。

図3は Er Rh_4B_4 の交流帯磁率 χ_{ac} と電気抵抗 ρ の温度変化を示す²²⁾。Er Rh_4B_4 は $T_c = 8.7\text{ K}$ で超伝導になり、 $T_{c1} = 0.92\text{ K}$ で抵抗が生じて超伝導は消滅する。温度が 0.92 K 以下では強磁性状態であることが中性子回折により確かめられている。

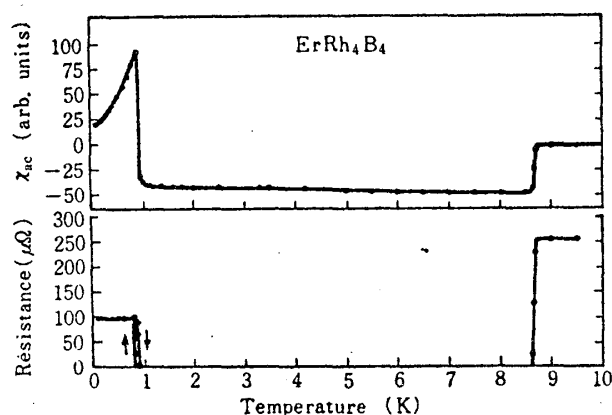


図3. Er Rh_4B_4 の交流帯磁率 χ_{ac} (上図) と電気抵抗 (下図) の温度変化²²⁾

Rhの一部をIrで置換した四元化合物 $\text{Dy}(\text{Ir}_x\text{Rh}_{1-x})_4\text{B}_4$ の相図が図4に示されている。これまでの物質では超伝導転移温度 T_c が磁気転移温度 T_m より高温であった。この系では、 x

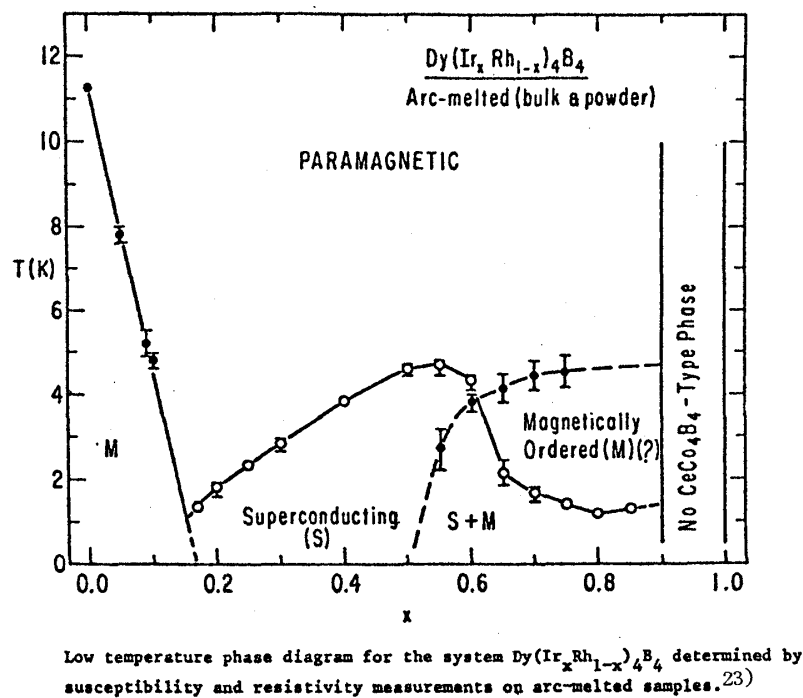
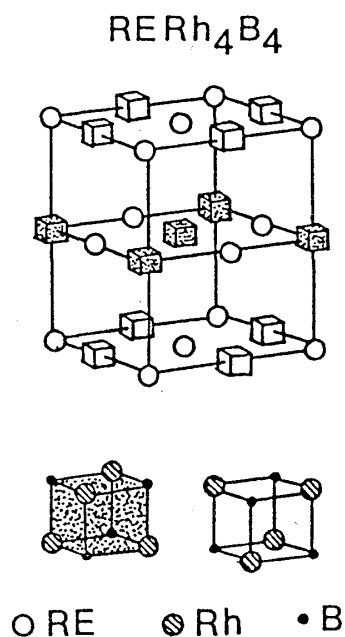


図 4.

が 0.6～0.9 のところで磁気秩序が超伝導より高温で出現している。この実験は、ラフォイエのグループによるものである²³⁾。

RERh_4B_4 系 (RE=希土類元素) の結晶構造を図5に示す。REと二種類の Rh_4B_4 の unit

図 5. RERh_4B_4 の結晶構造

に分かれており，磁性は RE が担っている。超伝導電子は主として Rh_4B_4 の unit 上を動き回っている，超伝導電子と RE の持つ局在磁気モーメントとの直接的な相互作用は弱い。

図 6 は Chevrel 化合物の相図である。多くの REMo_6S_8 において，低温で反強磁性と超伝導

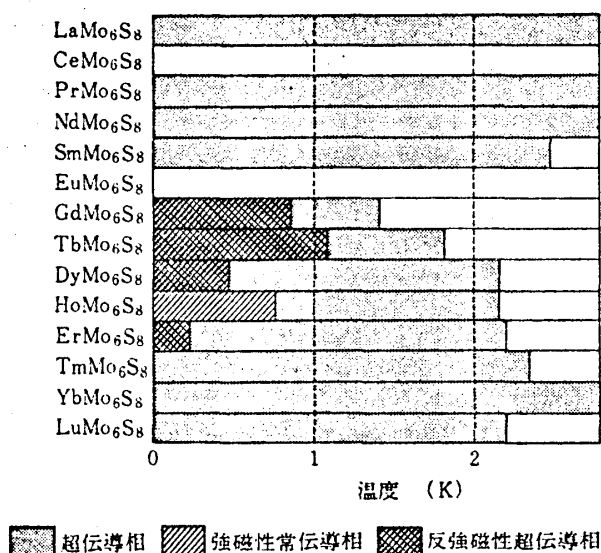
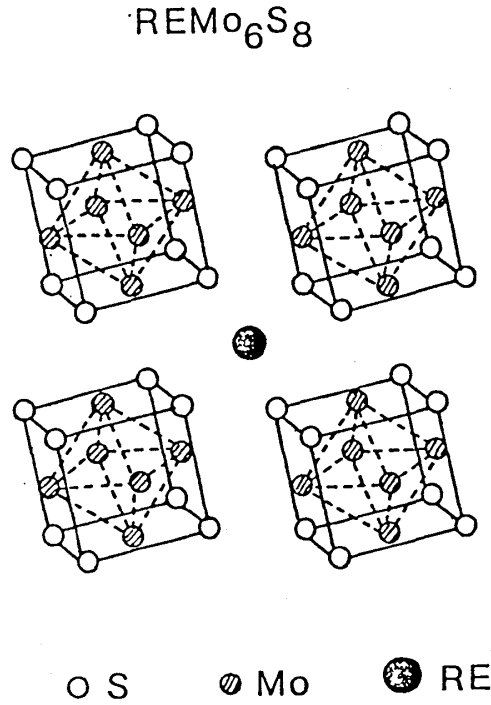


図 6. REMo_6S_8 の状態変化

の共存状態が起こる。 HoMo_6S_8 だけは高温で超伝導になるが，低温で強磁性磁気秩序を起こし超伝導は消失する。 EuMo_6S_8 では何も起こらないように書かれているが，最近のデータによると 7 kbar の圧力をかけると， $T_c = 11\text{K}$ で超伝導に転移し，更に低温で反強磁性になることがわかっている。

Chevrel 化合物の結晶構造は図 7 に示されているように，RE と Mo_6S_8 の unit に分かれている。超伝導電子は Mo_6S_8 の unit 上を動き回っている，希土類イオンとの波動関数の重なりは小さく，exchange や mixing による交換相互作用は非常に小さくなっている。

図7. REMo_6S_8 の結晶構造

§ 3.2 phason gauge と Coulomb gauge の関係

2章では、ゲージ条件として phason gauge という特殊なものを使ってきた。物性論で用いるのは Coulomb gauge なので、実際の問題を扱う際には phason gauge と Coulomb gauge の関係式が必要になる。

phason gauge の条件は

$$D_\mu(\partial) a_\mu = 0 \quad (3-1)$$

である。ベクトルポテンシャル \vec{a} には縦、横両成分が含まれる。このゲージでの電磁場の表現は、 \vec{a} の縦成分、横成分を $\vec{a}^{(1)}$, $\vec{a}^{(t)}$ と書くと

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} a_0 - \frac{1}{c} \frac{\dot{\vec{a}}^{(1)}}{a} - \frac{1}{c} \frac{\dot{\vec{a}}^{(t)}}{a} \quad (3-2)$$

$$= -\vec{\nabla} \left(a_0 + \frac{1}{c} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{a}} \right) - \frac{1}{c} \frac{\dot{\vec{a}}^{(t)}}{a}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{a}^{(t)} \quad (3-3)$$

になる。一方 Coulomb gauge の条件は $a_{c\mu}$ を Coulomb gauge でのベクトルポテンシャルとすると

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a}_c = 0 \quad (3-4)$$

ベクトルポテンシャル \vec{a}_c には構成成分しかないことを示している。電場、磁場の表現はそれぞれ

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} a_{0c} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{a}_c}{\partial t} \quad (3-5)$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{a}_c \quad (3-6)$$

の様に表わされる。(3-2)式と(3-5)式, (3-3)式と(3-6)式を比較することにより, Coulomb gauge と phason gauge の関係式が次の様に求まる。

$$\vec{a}_c = \vec{a}^{(t)} \quad (3-7)$$

$$\vec{a}_{0c} = a_0 + \frac{1}{c} \frac{1}{\nabla^2} \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{a}} \quad (3-8)$$

§ 3.3 モデルと相互作用

2章で述べた Boson theory の結果を磁性超伝導体に応用しよう。磁性超伝導体のモデルとして図8のような最も単純なものをとる。規則格子に大きな磁気モーメントを持った希土類イオンが並んでおり, その中を超伝導を担う伝導電子が動き回っているとする。希土類イオンの磁気モーメントの間には弱い交換相互作用が働いている。この交換相互作用の起源としては, RKKY 相互作用, 超交換相互作用, 磁気双極子相互作用などが考えられるが, すべてからの寄与を含めて $J S_i S_j$ と書く。伝導電子は超伝導になるのだから, 伝導電子間には BCS 相互作用が働いている。希土類イオンと伝導電子の間には, $s-f$ 交換相互作用が働いているが, この相互

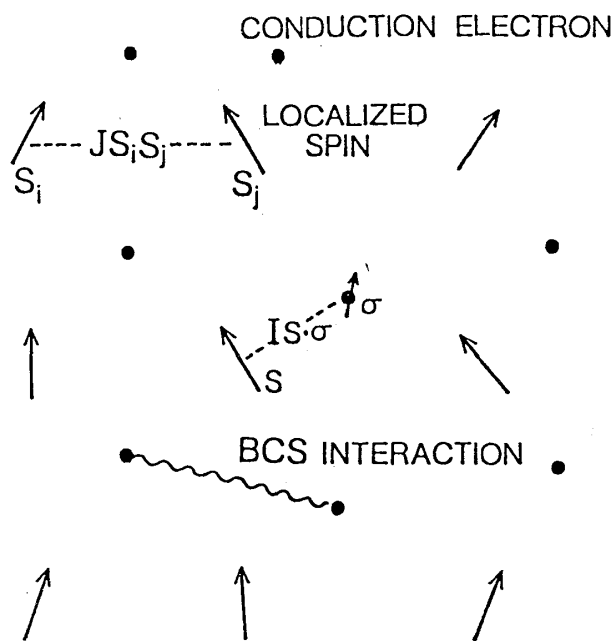


図8. 磁性超伝導体中の相互作用

作用が強いと超伝導は壊れる。ここで考えている化合物では、磁性と超伝導とが共存するのであるから s - f 交換相互作用はそれ程大きくないということである。つまり、希土類イオンの $4f$ 電子と伝導電子の波動関数の重なりは極めて小さいということであり、それは詳細なバンド計算によって確かめられている。 s - f 交換相互作用の存在する場合、電流を記述する式 (2-108) で影響を受ける部分は $c(\nabla)$ である。 $c(\nabla)$ がどのような影響を受けるかは計算可能であるが、ここではその効果は小さく無視できるものと仮定して議論を進める。

§ 3.4 スピンスパイラル秩序と超伝導 Bloch 壁^{12,13,14,19)}

簡単のため定常的な場合を考える。この場合にはベクトルポテンシャルはゲージの取り方にはよらない。つまり

$$\vec{a}_{\text{phason}}(x) = \vec{a}_{\text{coulomb}}(x) = \vec{a}(x)$$

が成り立つ。電流の表式は Gauss 単位系をとると

$$\begin{aligned} \vec{j}(x) = & -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} c(-i\nabla) \left(\vec{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} f(x) \right) \\ & + \frac{1}{4\pi} \nabla^2 \delta m^2 (-\nabla^2) \vec{a}^\dagger(x) \end{aligned} \quad (3-9)$$

となり、第1項めは超伝導電流を表わし、第2項めは磁性超伝導体ではスピン電流を表わす。磁性の影響は $\vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a} = \vec{h} + 4\pi\vec{m}$ より \vec{a} を通して第1項目にも含まれている。スピン電流の表式は物理的に別の方面から推測できる。磁気誘導（微視的磁場）を次の式で定義する。

$$\vec{b}(x) = \vec{h}(x) + 4\pi\vec{m}(x) \quad (3-10)$$

$\vec{h}(x)$ は超伝導電流の作る磁場で、 $\vec{m}(x)$ は連続体近似での希土類イオンの磁気モーメントである。(3-10)式の両辺に $\vec{\nabla} \times$ を作用させて

$$\vec{\nabla} \times \vec{h}(x) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{persistent}}(x) \quad (3-11)$$

を用い、更に $\vec{j}_{\text{persistent}}(x)$ として (3-9) 式右辺第1項を使うと (3-10) 式は

$$\vec{\nabla} \times \vec{b}(x) = -\frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \left(\vec{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} f(x) \right) + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{m}(x) \quad (3-12)$$

となる。(3-12)式の両辺にもう一度 $\nabla \times$ を作用させると

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{b}(x) = & -\frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \left(\vec{\nabla} \times \vec{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} \times f(x) \right) \\ & + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{m}(x) \end{aligned} \quad (3-13)$$

立木 昌

と書き換えられる。 $f(x)$ が singularity を含まない関数の場合には $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f(x)$ は0になるが、超伝導体中に渦系などが存在する時には $f(x)$ は singularity を含んでいて、 $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f(x)$ から寄与がある。今の場合には簡単のために、このような寄与はないとしておく。 $\vec{a}(x)$ と $\vec{b}(x)$ は

$$\vec{b}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{a}(x) \quad (3-14)$$

で結ばれている。磁気モーメントを縦成分 $\vec{m}^{\parallel}(x)$ と横成分 $\vec{m}^{\perp}(x)$ の和で表わす。

$$\vec{m}(x) = \vec{m}^{\parallel}(x) + \vec{m}^{\perp}(x) \quad (3-15)$$

ここに $\vec{m}^{\parallel}(x)$ と $\vec{m}^{\perp}(x)$ はそれぞれ

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{m}^{\parallel}(x) = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{m}^{\perp}(x) = 0$$

を満す。 $\vec{b}(x)$ は横成分しか含まないので、(3-13)式に(3-14)、(3-15)式を代入して、横成分だけを取り出すと

$$-\nabla^2 \vec{b}(x) = -\frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \vec{b}(x) - 4\pi \nabla^2 \vec{m}^{\perp}(x) \quad (3-16)$$

を得る。これより磁気誘導 $\vec{b}(x)$ は横成分の磁気モーメントで表わされ

$$\vec{b}(x) = \frac{-4\pi \nabla^2}{-\nabla^2 + \frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla)} \vec{m}^{\perp}(x) \quad (3-17)$$

となる。磁場の横成分 $\vec{h}^{\perp}(x)$ は(3-17)式を用いて

$$\begin{aligned} \vec{h}^{\perp}(x) &= \vec{b}(x) - 4\pi \vec{m}^{\perp}(x) \\ &= \frac{-4\pi c(-i\nabla)}{-\lambda_L^2 \nabla^2 + c(-i\nabla)} \vec{m}^{\perp}(x) \end{aligned} \quad (3-18)$$

と求められる。これはスピン電流により作られる磁場を表わしている。一方、磁場の縦成分

$\vec{h}^{\parallel}(x)$ は $\vec{b}(x)$ が横成分しか含まないから

$$\vec{h}^{\parallel}(x) = -4\pi \vec{m}^{\parallel}(x) \quad (3-19)$$

となる。

これらの表式から、磁性超伝導体での磁気モーメント間の有効交換相互作用が、どのように表現されるか調べよう。磁気モーメント $m(x)$, $m(y)$ の間には交換相互作用が働いており、その相互作用定数を $r(x-y)$ とする。この交換相互作用の起原には、RKKY相互作用、超交換相互作用、磁気双極子相互作用などがあるが、 $r(x-y)$ はすべてからの寄与を含めた相互作用定数とする。磁性超伝導体では、磁気モーメント間に流れている超伝導電流により、交換

Screening effect

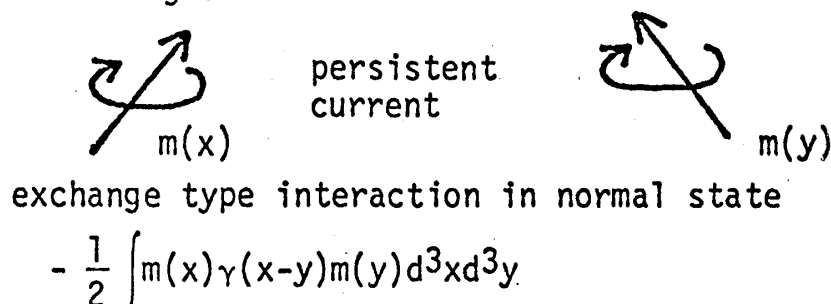


図 9.

相互作用は遮蔽される。常伝導状態での交換相互作用は

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \iint \vec{m}(x) r(x-y) \vec{m}(y) dx dy \\
 & = -\frac{1}{2} \int \vec{m}(x) r(-i\nabla) \vec{m}(x) dx
 \end{aligned} \tag{3-20}$$

と書けるので、超伝導状態での分子場 $\vec{h}_{m,s}(x)$ は

$$\vec{h}_{m,s}(x) = r(-i\nabla) \vec{m}(x) + \vec{h}(x) \tag{3-21}$$

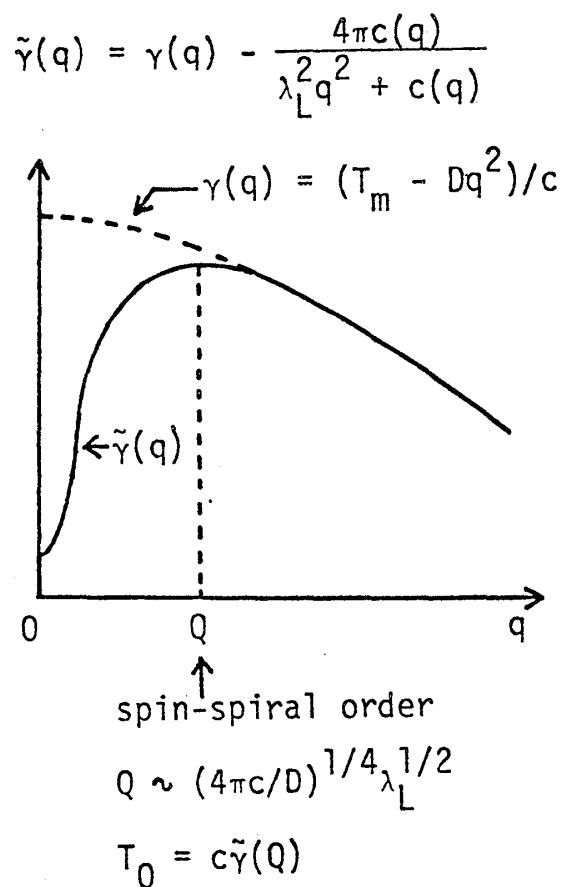
と表わせる。(3-21)式は(3-18)式、(3-19)式を代入すると

$$\begin{aligned}
 \vec{h}_{m,s}(x) &= (r(-i\nabla) - 4\pi) \vec{m}^1(x) \\
 &+ \left(r(-i\nabla) - \frac{4\pi c(-i\nabla)}{-\lambda_L^2 \nabla^2 + c(-i\nabla)} \right) \vec{m}^t(x)
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

と書き換えられる。横成分の有効交換相互作用定数を $\tilde{r}(-i\nabla)$ と書く。その Fourier 成分は

$$\tilde{r}(q) = r(q) - \frac{4\pi c(q)}{\lambda_L q^2 + c(q)} \tag{3-23}$$

となる。第2項は超伝導電流が相互作用を遮蔽する部分である。常伝導状態での交換相互作用が強磁性的とした場合、 $r(q)$ は図10の点線で示されるように $q=0$ で最大値をとり、温度 $T = Cr(0)$ (C : Curie 定数) で強磁性が出現する。超伝導状態での有効交換相互作用定数 $\tilde{r}(q)$ は図10の実線で示されている。 q が小さいときには、超伝導電流が非常に強く遮蔽するため、 $\tilde{r}(q)$ は $q = Q = \left(\frac{4\pi c}{D}\right)^{1/4} \lambda_L^{1/2}$ で最大値をとる。これは進行方向 Q に垂直なスピン配列を持つ波数 Q のスピン・スパイラル秩序が、 $T_Q = C\tilde{r}(Q)$ 以下の温度で出現することを意味している。これは非常に長い波長のスピン・スパイラルであり、最近中性子回折の実験で HoMo_6S_8 では波長 $\lambda \sim 200 \text{ \AA}$ 、 ErRh_4B_4 では波長 $\lambda \sim 100 \text{ \AA}$ のスピン・スパイラル秩序

図 10. 交換相互作用定数の q -依存性

の起こることが観測されている。

図 11 はスピン・スパイラル相，常磁性超伝導相，強磁性超伝導相の自由エネルギーを，常磁性常伝導相の自由エネルギーを基準にとって計算した結果である。温度を下げていくと， T_Q で常磁性超伝導相が 2 次転移でスピン・スパイラル相に移り，更に T_{c_2} で 1 次相転移を起こして強磁性常伝導相に移る。実際中性子回折によると， ErRh_4B_4 や HoMo_6S_8 ではスピン・スパイラル状態に相当する散乱ピークが観測されている。このように低温で強磁性常伝導状態，高温で常磁性超伝導状態となる物質では， T_{c_2} と T_Q の間の温度範囲で波長の非常に長いスピン・スパイラル状態の実現することが，実験でも確かめられている。

温度が T_{c_2} 以下の強磁性常伝導相では，試料は多くの磁区に分かれ，その間には Bloch 壁が存在する。Bloch 壁内ではスピン配列は，スピン・スパイラル配列に類似している。それで Bloch 壁の厚さ l がコヒーレンスの長さ ξ より十分長い場合には，Bloch 壁の外側では常伝導であっても，Bloch 壁の中では二次元的超伝導の実現する可能性がある。これは理論的予想で実験的にはまだ確かめられてはいない。ただ図 3 で示したように， ErRh_4B_4 の T_{c_2} 以下の電

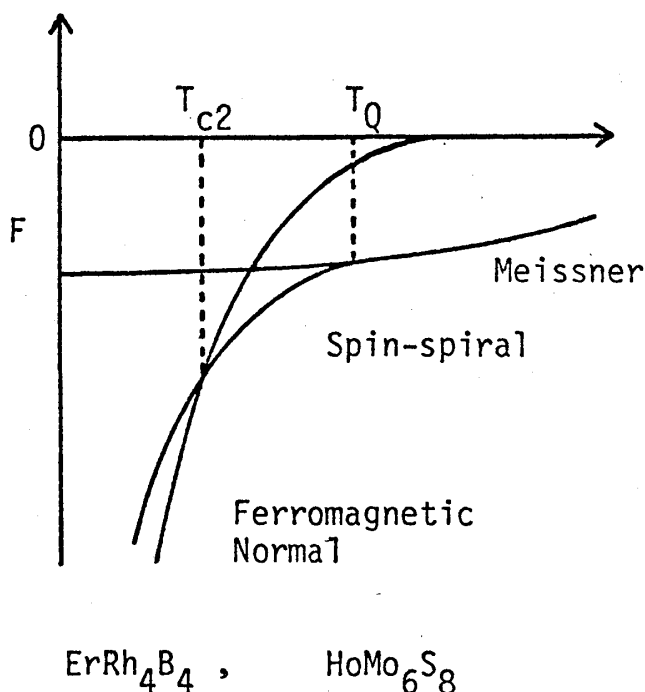


図 11. 強磁性超伝導体の自由エネルギー

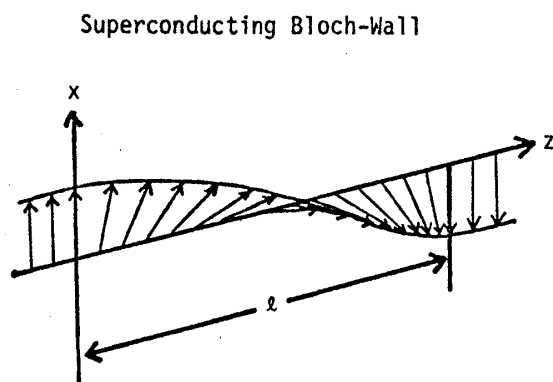


図 12.

気抵抗が T_c 以上の電気抵抗より小さいという実験結果は、強磁性相に超伝導Bloch壁が存在するとすれば理解できるかもしれない。

§ 3.5 スピンのゆらぎ¹⁵⁾

磁性超伝導体では、有効交換相互作用の形が(3-23)式第2項の部分だけ、強磁性常伝導状態下のものとは異なるので、スピンのゆらぎの様子も変化すると期待される。 ErRh_4B_4 などでは、磁気転移点近傍で大きなスピンのゆらぎがあり、その様子は有効交換相互作用定数の q 依存性と関係がある。縦成分、横成分の相互作用定数の差が大きいため、各成分のスピンのゆ

立木 昌

らぎにも大きな相違が現われ観測にかかるものと予想される。そこで各成分の帯磁率を調べる。 q の方向が z 軸に平行なとき、最低次の近似で垂直帯磁率 $\chi_{\perp}(q)$ 、平行帯磁率 $\chi_{\parallel}(q)$ は次の様に書ける。

$$\begin{aligned}\chi_{\perp}(q) &= (g\mu_B)^2 (S_q^x, S_{-q}^x) \\ &= \frac{C}{T - C \left(r(q) - \frac{4\pi c(q)}{\lambda_L^2 q^2 + c(q)} \right)}\end{aligned}\quad (3-24)$$

$$\begin{aligned}\chi_{\parallel}(q) &= (g\mu_B)^2 (S_q^z, S_{-q}^z) \\ &= \frac{C}{T - C(r(q) - 4\pi)}\end{aligned}\quad (3-25)$$

ここで C は Curie 定数である。 q の小さいところでは $\chi_{\perp}(q)$ と $\chi_{\parallel}(q)$ はほとんど等しいが、 q が大きくなるにつれて $\chi_{\perp}(q)$ が $\chi_{\parallel}(q)$ より大きくなる。他方、常伝導状態下の帯磁率の表式は、(3-24)式で $\lambda_L \rightarrow \infty$ の極限をとることにより

$$\chi_{\perp}^n(q) = \frac{C}{T - Cr(q)} \quad (3-26)$$

$$\chi_{\parallel}^n(q) = \frac{C}{T - C(r(q) - 4\pi)} \quad (3-27)$$

と求まる。波数 q の小さいところを調べると、超伝導状態では $\chi_{\perp}(q)$ も $\chi_{\parallel}(q)$ も等しいが、常伝導状態になると $\chi_{\perp}(q)$ が急激に増加する。

最近、超音波減衰の実験からこのような事実が観測されるようになった。測定は、ウィスコンシン大学とカリフォルニア大学の協同研究および東北大学でなされた。音波のエネルギーは図 13 で示されるようにスピンと音波の相互作用を通してスピン系へ費やされる部分と、伝導電子と音波の相互作用を通して伝導電子系へ散逸される部分とがある。用いる音波の振動数が 15 MHz 程度の時には、伝導電子系に散逸する音波のエネルギーは、スピン系に散逸する音波

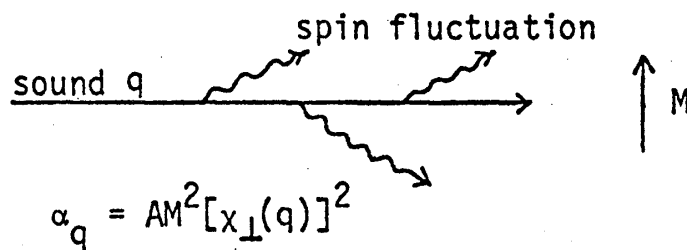


図 13. 超音波減衰

のエネルギーに比べて、 $1/1000$ 程度小さいので、音波の減衰はほとんどスピン系により起こされると考えてよい。音波減衰係数は揺動散逸定理を用いると計算できる。音波の波数 \vec{q} に対して磁場を垂直にかけたときの音波減衰係数 α_q は

$$\alpha_q = AM^2 [\chi_{\perp}(q)]^2 \quad (3-28)$$

で与えられ、 \vec{q} に対して磁場を平行にかけたときの音波減衰係数 α_q は

$$\alpha_q = AM^2 [\chi_{\parallel}(q)]^2 \quad (3-29)$$

で与えられる。ここに A は音波とスピンの結合に関係した定数、 M は磁化、 $\chi_{\perp}(q)$ 、 $\chi_{\parallel}(q)$ は垂直帯磁率、平行帯磁率である。音波減衰係数の計算結果を図 14 に示す。温度を磁気転移点以上の温度に固定し、外部磁場 H を増加させていく。第二種超伝導体を想定しているので、

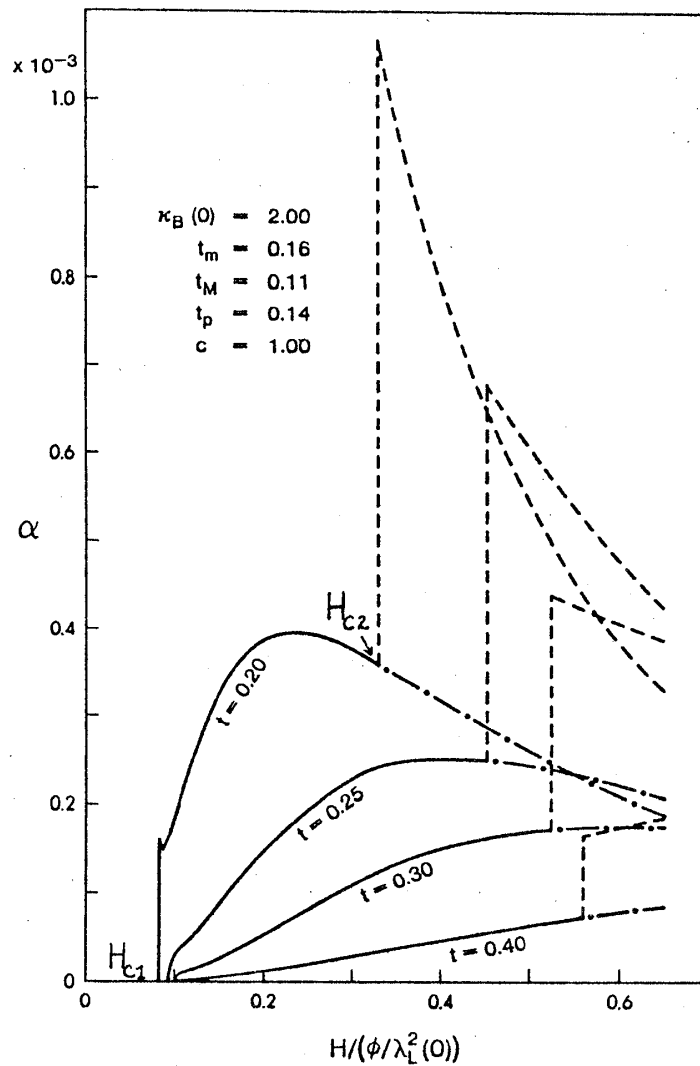


図 14. 音波減衰係数 (α) の磁場 (H) 依存性
 t は T_c で規格化された温度である。

外部磁場 H が下部臨界磁場 H_{c1} より小さいときは、Meissner 状態で磁場は侵入せず、磁化は誘起されないから α_q は 0 である。外部磁場が H_{c1} より大きくなると渦系が試料中に侵入し始め、渦系中に磁化が誘起されるため、音波の減衰が起こる。用いる音波の波長は 10000 \AA 程度で、London の侵入度 λ_L (300 \AA から 1000 \AA) と比べ非常に長いので、 $\chi_{\perp}(q)$ は $\chi_{\parallel}(q)$ にほとんど等しく、音波の減衰は等方的になる。外部磁場が上部臨界磁場 H_{c2} を越えると系は常伝導状態になる。常伝導状態になっても平行帯磁率は変化しないので、音波の進行方向と磁場が平行なときの音波減衰係数は、図 14 の一点鎖線のような磁場依存性を示す。垂直帯磁率は (3-24) 式と (3-26) 式を比較するとわかるように、常伝導状態になると急激に変化し、磁場と音波進行方向の垂直な場合の音波減衰係数は、図 14 の破線のように H_{c2} のところで急激に増加することが予想される。実験結果は、上に述べた理論的予測と定性的に一致している。

§ 3.6 中性子の磁気散乱¹⁶⁾

中性子の磁気散乱は、中性子の磁気モーメントと希土類イオンの磁気モーメント間の磁場を媒介にした相互作用により起こる。超伝導状態では磁場は超伝導電流により強く遮蔽されるから、中性子散乱の様子も大きな影響を受けると考えられる。希土類イオンの磁気モーメントが作るベクトルポテンシャル及び磁気誘導は

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \sum_{\vec{r}_e} \frac{\vec{\mu}_e(\vec{r}_e) \times (\vec{r} - \vec{r}_e)}{|\vec{r} - \vec{r}_e|^3} \quad (3-30)$$

$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}_0(\vec{r}) \quad (3-31)$$

で与えられる。ここで \vec{r}_e , \vec{r} は磁気モーメント $\vec{\mu}(\vec{r}_e)$ を持つ希土類イオン及び中性子の位

Magnetic scattering of neutrons

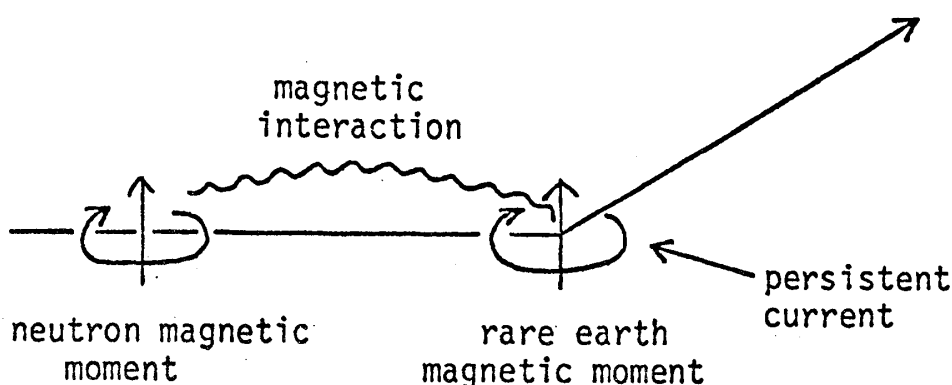


図 15.

置である。この磁気誘導は試料中に超伝導電流を誘起する。この超伝導電流により中性子と希土類イオンの磁気モーメント間の相互作用が影響を受ける。超伝導電流により遮蔽された磁気誘導を $\vec{B}(\vec{r})$ と書くと、 $\vec{B}(\vec{r})$ と遮蔽されていない磁気誘導 $\vec{B}_0(\vec{r})$ の差が、超伝導電流によって作られた磁場であるから

$$\vec{\nabla} \times (\vec{B}(\vec{r}) - \vec{B}_0(\vec{r})) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) \quad (3-32)$$

が成立する。遮蔽因子 $S(-i\nabla)$ を

$$\vec{B}(\vec{r}) \equiv S(-i\nabla) \vec{B}_0(\vec{r}) \quad (3-33)$$

で定義すると、(3-32)式は

$$\left(1 - \frac{1}{S(-i\nabla)}\right) \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) = -\frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \vec{A}(\vec{r}) \quad (3-34)$$

と書き換えられる。(3-34)式の両辺に $\vec{\nabla} \times$ を作用させると

$$\left(1 - \frac{1}{S(-i\nabla)}\right) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = -\frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla) \vec{B}(\vec{r}) \quad (3-35)$$

となり

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0$$

を考慮して、 $S(-i\nabla)$ について解くと

$$S(-i\nabla) = \frac{\nabla^2}{\nabla^2 - \frac{1}{\lambda_L^2} c(-i\nabla)} \quad (3-36)$$

と、遮蔽因子が演算子の関数として求まる。

中性子が散乱されるとき磁気相互作用ハミルトニアンは

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu}_N \cdot \vec{B}(\vec{r}) = -\vec{\mu}_N \cdot S(-i\nabla) \vec{B}_0(\vec{r}) \quad (3-37)$$

で与えられる。ここで $\vec{\mu}_N$ は中性子の磁気モーメントである。このハミルトニアンを使って Born 近似を施すと、常磁性超伝導状態での中性子散漫散乱の散乱断面積を計算することができ、結果は次のように書ける。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left| 1.91 \frac{e}{\hbar c} F(\vec{q}) \right|^2 k_B T [S(q)]^2 \chi_{\perp}(q) \quad (3-38)$$

$F(q)$ は磁気構造因子である。 $[S(q)]^2$ の因子が超伝導電流による遮蔽効果を表わしている。遮蔽因子 $S(q)$ の具体的な形は (3-36) より

$$S(q) = \frac{q^2}{q^2 + \lambda_L^{-2} c(q)} \quad (3-39)$$

で与えられる。 $[S(q)]^2$ のグラフ図 16 をみると、 q が小さいときには $[S(q)]^2$ は 0 に近

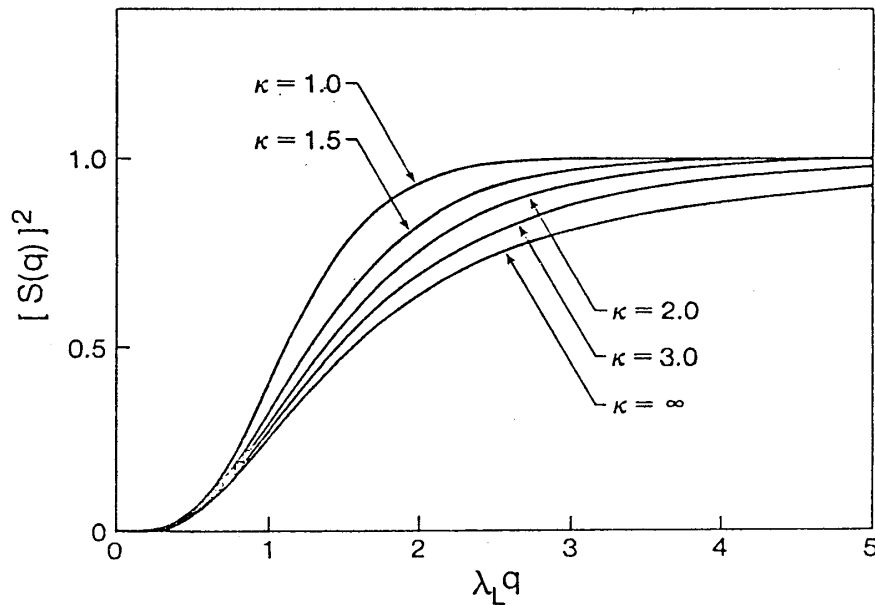


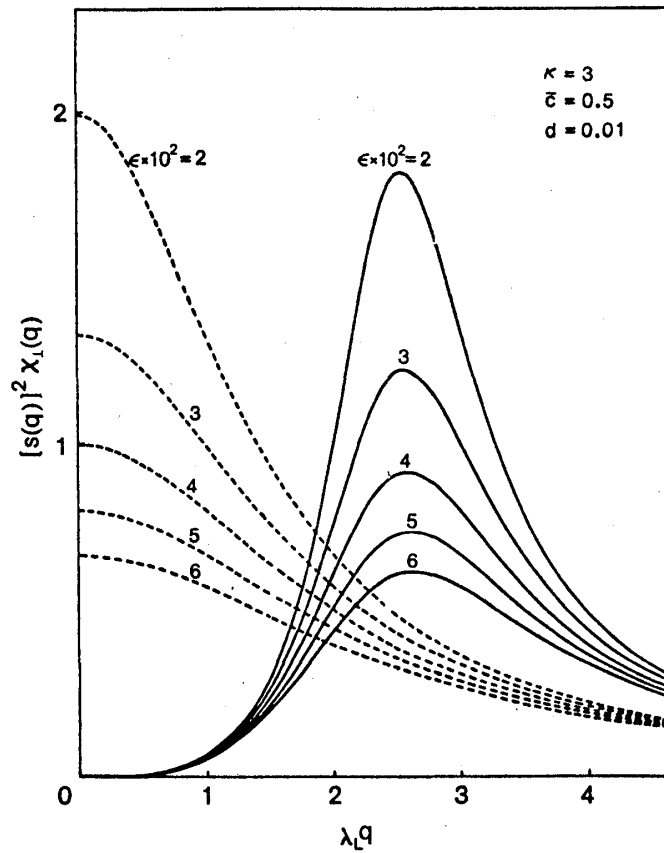
図 16. 遮蔽因子 $[S(q)]^2$ の q -依存性
 (κ : Landau パラメーター λ_L/ξ
 μ_L : London の侵入度, ξ : コヒーレンスの長さ)

く前方散乱はほぼ完全に遮蔽され散乱強度は非常に弱められることがわかる。このような現象は磁気転移温度近くの強磁性超伝導体で、中性子小角度散乱を測定することにより観測されるであろう。常伝導状態下の強磁性体は、中性子散乱断面積は波数 $q = 0$ でピークを持つが、超伝導状態になると上に述べた超伝導電流による遮蔽効果のため $q \simeq 0$ では散乱断面積は図 17 の実線のように 0 になることが期待される。実験はまだ行なわれていない。

§ 3.7 渦系状態^{11, 17)}

次に渦系状態が磁気モーメントの存在によりどのような影響を受けるか考えてみよう。常磁性超伝導体に外部磁場をかけ、系に n 個の渦系を作ったとする。系に磁場が侵入することにより、 $\frac{1}{4\pi} HB$ だけエネルギーを得するが、磁束の回りに超伝導電流が流れるために nE_{self} (E_{self} : 渦系の自己エネルギー) だけのエネルギーが増加する。従って Gibbs の自由エネルギーは、Meissner 状態を基準にすると

$$G = nE_{\text{self}} - \frac{1}{4\pi} HB \quad (3-40)$$



Dependence of $[s(q)]^2 \chi_{\perp}(q)$ on the scattering wave number. The quantity $[s(q)]^2 \chi_{\perp}(q)$ is proportional to the differential cross section. The solid curves indicate the values of $[s(q)]^2 \chi_{\perp}(q)$ for the superconducting state. For this state, the reduced temperature ϵ is defined by $(T - T_Q)/T_Q$, T_Q being the phase transition temperature for the spin-spiral state. The dashed curves indicate the values for the normal state. For this state, the reduced temperature is defined by $(T - T_m)/T_m$, T_m being the ferromagnetic phase transition temperature in the normal state.

図 17.

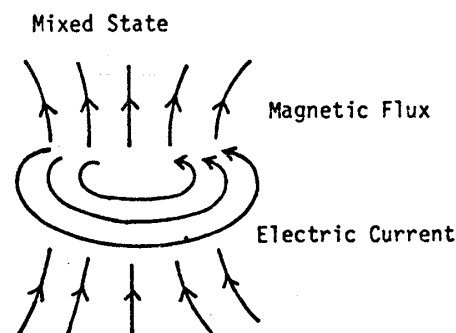


図 18. a 渦系

立木 昌

だけ増加する。磁束は量子化されるので、 ϕ を磁束の単位 $hc/2e$ とすると

$$B = n\phi$$

が成り立ち、(3-40)式は

$$G = n \left(E_{\text{self}} - \frac{\phi}{4\pi} H \right) \quad (3-42)$$

に書き換えられる。外部磁場 H を増加させ下部臨界磁場

$$H_{c1} = \frac{4\pi}{\phi} E_{\text{self}}$$

より大きくすると、Gibbs 自由エネルギー G は負になり、系に渦系が侵入した方が Meissner

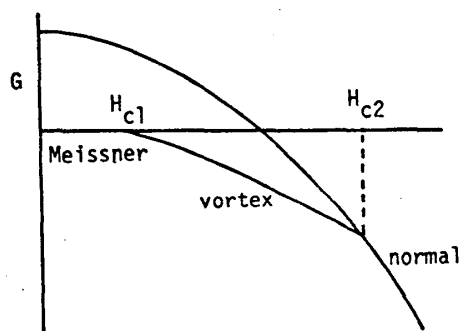


図 18. b Gibbs 自由エネルギー

状態より安定になる。更に外部磁場を上部臨界磁場 H_{c2} より大きくすると常伝導状態が安定になる。外部磁場 H が

$$H_{c1} < H < H_{c2} \quad (3-43)$$

の条件を満足する時、系に渦系（混合）状態が実現する。

常磁性超伝導体の場合には磁気モーメントが存在しないので、磁束 B と外部磁場 H とは等しい。磁性超伝導体の場合、渦系中にある磁気モーメントを持った希土類イオンは分極を起こし磁化を生ずる。その結果磁束量子化に影響を及ぼす。

渦系が存在する時、系のエネルギーを絶対零度の場合につき次の様に計算することができる。渦系のエネルギー W は

$$W = -\frac{1}{2} \int d^3x \vec{j}(x) \left(\vec{a}(x) - \frac{\hbar c}{e} \vec{\nabla} f(x) \right) \quad (3-44)$$

と書ける。 $x=0$ に渦系があり $\vec{j}(x)$ はその渦系の回りを流れる超伝導電流とする。 $\vec{h}(x)$

をこの渦系の作る磁場とすると

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}(x) = \vec{\nabla} \times \vec{h}(x) \quad (3-45)$$

が成り立ち、(3-44)に代入して部分積分を実行すると

$$W = \frac{\hbar c}{8\pi e} \int d^3x \vec{h}(x) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f(x) - \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{h}(x) \cdot \vec{b}(x) \quad (3-46)$$

と変形できる。 $x=X$ にもう一個渦系が存在するという状況は $f(x)$ に singularity を持たせて

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f(x) = \pi \vec{e} \delta(x-X) \quad (3-47)$$

と置くことにより表わすことができる。 \vec{e} は渦系の方向を示す単位ベクトルである。この時には(3-46)式は

$$W = \frac{\hbar c}{8e} h(X) - \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{h}(x) \cdot \vec{b}(x) \quad (3-48)$$

と書き換えられる。渦系の作る磁場のエネルギーを加えると全エネルギーの表式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} E &= W + \frac{1}{8\pi} \int d^3x \vec{h}(x) \cdot \vec{b}(x) \\ &= \frac{\hbar c}{8e} h(X) \end{aligned} \quad (3-49)$$

これは $x=0$, $x=X$ にある2つの渦系間の相互作用を示し、 $h(X)$ が正なら斥力相互作用が働き、 $h(X)$ が負なら引力相互作用が働くことがわかる。

一方、磁束量子化の条件は渦系中に誘起される磁化を $\vec{m}(x)$ と書くと

$$\begin{aligned} \phi &= \int b(x) d^2x \\ &= \int h(x) d^2x + 4\pi \int m(x) d^2x \end{aligned} \quad (3-50)$$

で表わされ、 $h(x)$ の空間分布は $m(x)$ により影響を受ける。温度が磁気転移温度より十分高い場合、磁化 $m(x)$ は小さく $h(x)$ の空間分布はほとんどの領域で正である。従って渦系間には斥力相互作用が働き、渦系は稠密な三角配列をとる。磁気転移点近傍の温度の場合、磁化 $m(x)$ は大きくなるので $h(x)$ は大きな影響を受け、図 19 に示す様に $h(x)$ の裾の部分が負になる。この部分では渦系は引力相互作用を持つ。その結果渦系は互いに引きあい、磁場が H_{c1} になると渦系は急激に試料中に侵入する。その事情が図 20 に示されている。外部磁場 H が H_{c1} より小さい時 Meissner 効果のため磁化は

$$M = -\frac{1}{4\pi} H$$

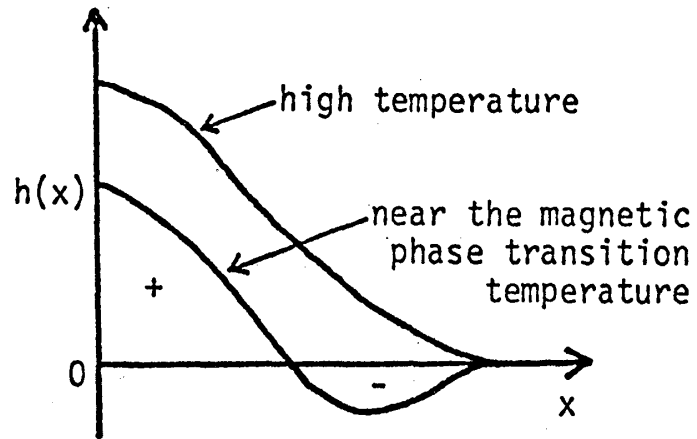


図 19. $X=0$ にある渦系のまわりに生ずる磁場

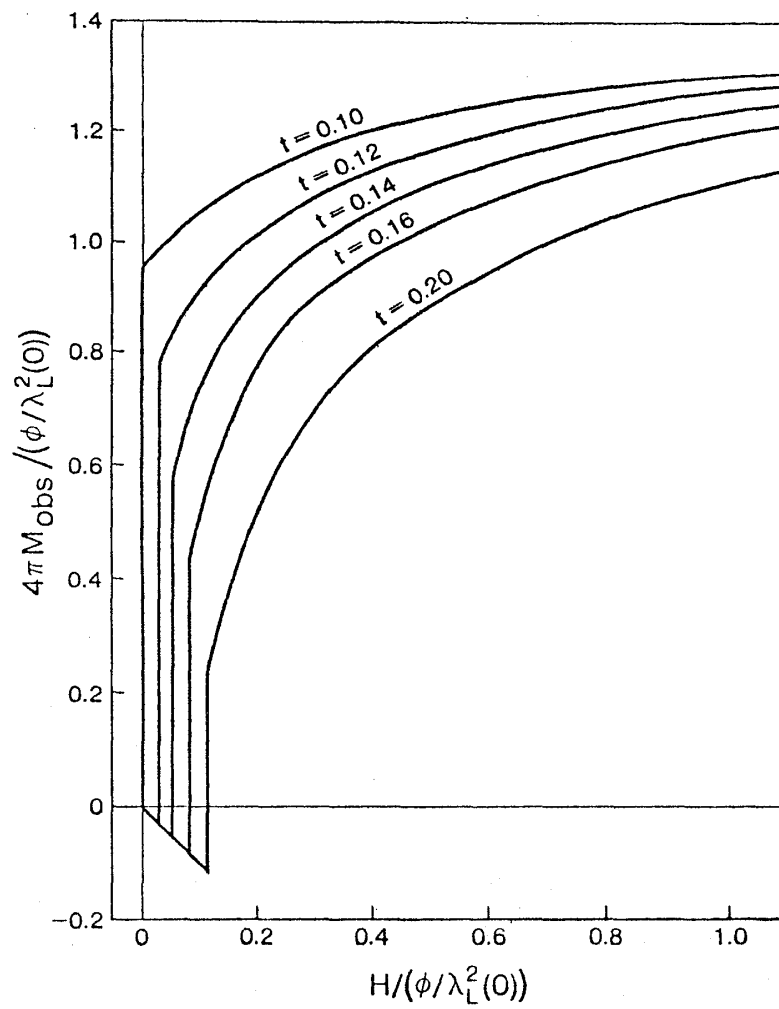


図 20. 磁化曲線 ($t = T/T_c$)

にそって減小するが、外部磁場が H_{c1} になると渦系が急激に系内に入るため、磁化曲線には有限の飛びを生ずる。最近ドイツのアドリアンが、外部磁場 H が H_{c1} 近傍の時の磁化を精密に測定して、この飛びを観測している。温度を更に下げると $H=0$ のところでも磁化曲線に有限の飛びを生ずるという計算結果を得た。これは外部磁場が存在しなくても渦系状態が出現することを意味しており、この状態を自己誘導渦系（混合）状態と呼んでいる。物理的には渦系の存在のため生じた磁場が磁化を誘起して磁気系のエネルギーを下げ、渦系状態を self-consistent に安定化させると考えることができる。

自己誘導渦系状態の出現条件を調べるため絶対零度の場合を考えよう。磁気モーメントを持たない第二種超伝導体では、外部磁場 H が下部臨界磁場 H_{c1} と上部臨界磁場 H_{c2} の間の範囲にあるとき渦系状態が出現する。試料中に一様な磁化が存在するとき電子は $4\pi M$ をあたかも外部磁場のように感じて運動する。従って、

$$H_{c1} < 4\pi M < H_{c2} \quad (3-51)$$

の条件を満たす磁化 M が存在する場合には、外部磁場をかけなくても渦系の出現する可能性がある。一様な磁化が発生するためには、希土類イオンの磁気モーメントに働く分子場の平均値が

$$H_m = n\phi - 4\pi M + r(0)M > 0 \quad (3-52)$$

なる条件を満足しなければならない。その結果、磁化 M が

$$H_m < 4\pi M < H_{c2} \quad (3-53)$$

の条件を満たす時には、自己誘導渦系状態が安定な状態となる。

§ 3.8 相図

これまで自己誘導渦系状態、スピン・スパイラル状態、Meissner 強磁性状態について調べてきたが、どの状態が実現するかはパラメーターに依存する。Landau パラメーター $\kappa_B = \lambda_L / \xi_c$ (λ_L : London の侵入度, ξ_c : コヒーレンスの長さ) と超伝導転移温度 T_c で規格化した温度 $t = T/T_c$ を変化させ、他のパラメーターは固定した時、自由エネルギーの計算から求めた相図を図 21 に示す。実線は二次転移、破線は一次転移を表わす。 κ_B が小さい場合には温度を下げていくと、Meissner 状態、spiral 状態、ferro 状態と状態変化する。ErRh₄B₄ や HoMo₆S₈ はこの場合に相当していると考えられる。 κ_B が 2.5 より大きくなると、Meissner 状態から、spiral 状態、vortex 状態、ferro 状態と変化することが期待されるが、実験的にはまだ発見されていない。

温度 t とある単位で測った磁化 u_0 を変化パラメーターとした相図は図 22 で与えられる。

低温で強磁性になる物質、例えば HoRh₄B₄ に非磁性イオン Lu を加えていったときの相図を

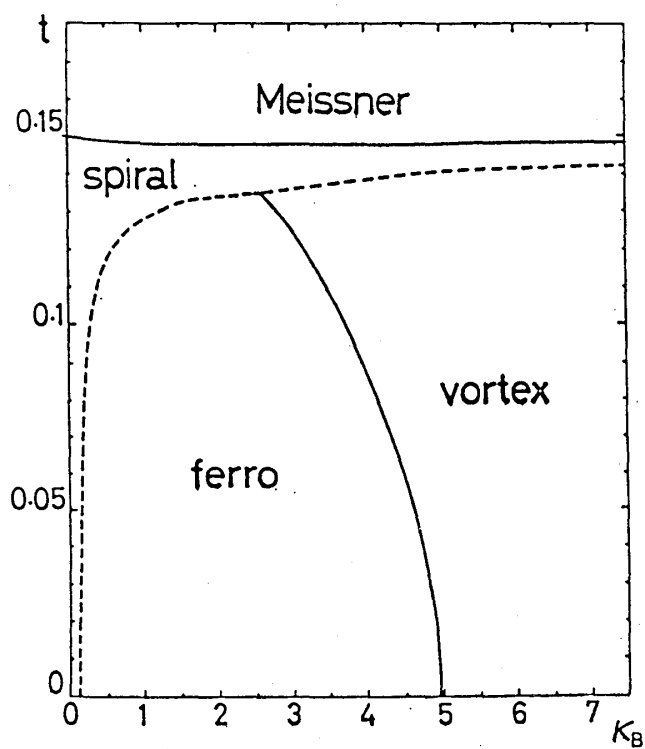


図 21. 温度 $t (= T/T_c)$ と Landau パラメーター $\kappa_B (= \lambda_L/\xi)$ に対する相図

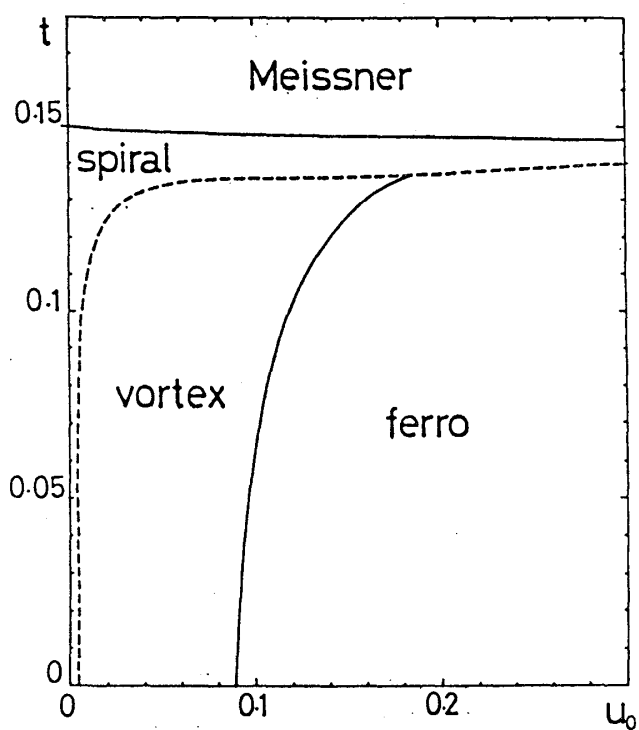


図 22. 温度 $t (= T/T_c)$ と $u_0 (= \frac{M(0)}{\phi/l_0^2})$,

$l_0 = \sqrt{\xi(0)\lambda_L(0)}$ に対する相図

図 23 に示す。 x は $\text{Ho}_x\text{Lu}_{1-x}\text{Rh}_4\text{B}_4$ で定義されている。

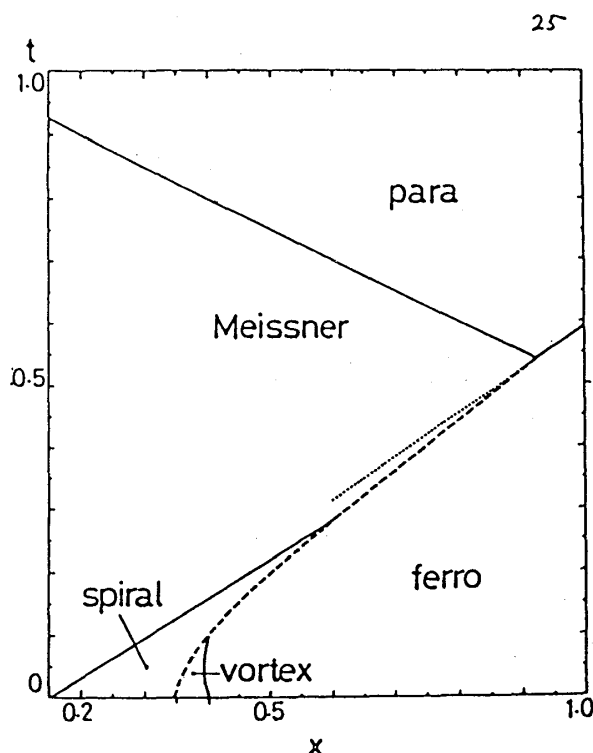


図 23. 温度 $t (= T/T_c)$ と磁性イオン濃度 x に対する相図

§ 3.9 表面と薄膜^{18, 19)}

強磁性超伝導体の表面や薄膜では非常に奇妙な現象が起こる。表面や薄膜の状態を調べる際に重要なことは、電流や磁化の試料表面での反射を考慮に入れることである。 $x=0$ が試料表面とし、反射率を R とすると、点 x に流れる超伝導電流 $\vec{j}(x)$ は

$$\begin{aligned} \vec{j}(x) = & -\frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \int c(x-x') \vec{a}(x') dx' \\ & - R \frac{c}{4\pi\lambda_L^2} \int c(x+x') \vec{a}(x') dx' \end{aligned} \quad (3-54)$$

で表わされる。薄膜の状態を考える場合には両表面からの反射の寄与を取り入れなければならない。外部から磁場 H_0 をかけた時、表面から試料内に侵入する磁場の空間依存性を図 24 に模式的に示した。温度 T がある温度 T_0 ($\gg T_m$) より高い時には、通常の超伝導体と同様に侵入した磁場は London の侵入度 λ_L 程度で単調に減衰するが、 T_0 より低温になると磁気モーメントの影響で外部からかけた磁場と逆方向の磁場を持つ部分が表われ振動しながら減衰する。更に温度を下げると T_s で表面での磁化が発散する。つまり T_s 以下の温度領域では外部磁場を

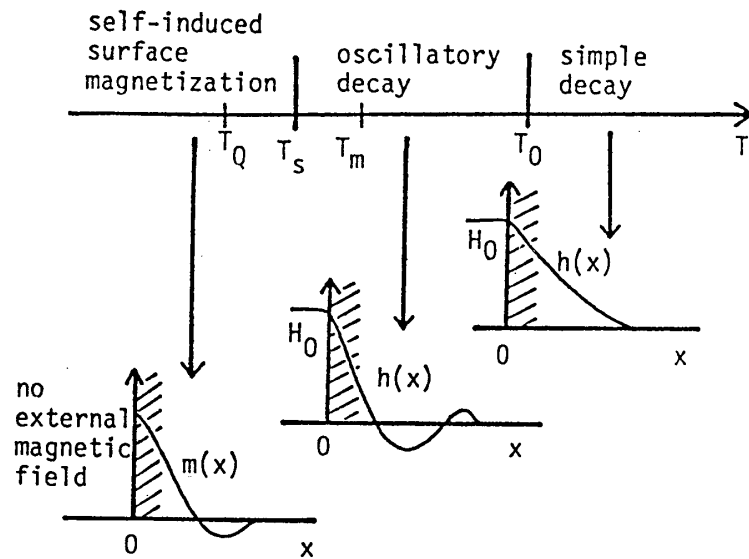


図 24. 表面磁場の温度変化

かけなくとも表面磁化が自発的に発生し、超伝導と共存する。表面磁化は、表面に超伝導電流を流し、この電流に誘起される磁場により self-consistent に安定化されるのである。

このような現象は強磁性超伝導体の薄膜でも起こる。外部から磁場 H_0 をかけた時、図 25 に示されているように、温度 T が磁気転移温度 T_m より下になると、内部磁場に負の部分が見われる。

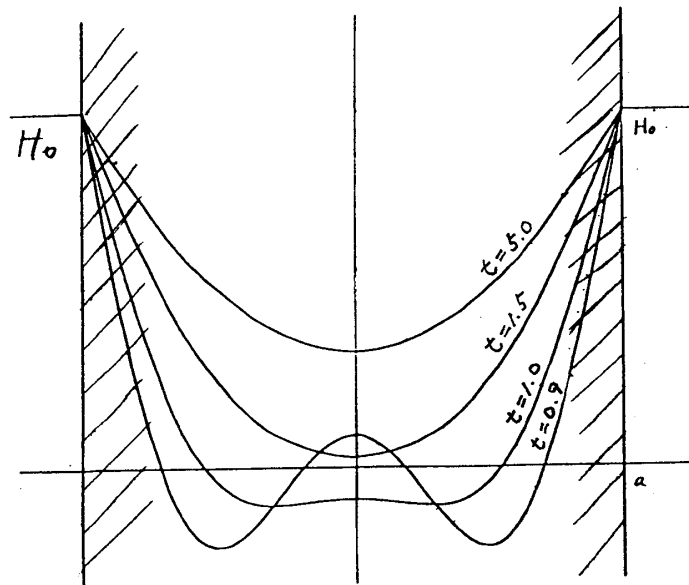


図 25. 薄膜内の磁場の空間変化

H_0 は外部磁場を表し、温度 t は常伝導状態に於ける強磁性転移温度 T_m で規格化されている。($t = T/T_m$)

表面の場合と同様に臨界温度 T_s 以下で自発磁化が生じ超伝導と共存する。図 26 に示すように T_s は膜厚 $2a$ に依存する。点線で示した T_s^0 は半無限超伝導体表面に現れる自発磁化に対する臨界温度である。膜厚が λ_L より薄いと T_s は T_s^0 より大きい。膜厚を厚くしていくと T_s は漸近的に T_s^0 に近づく。

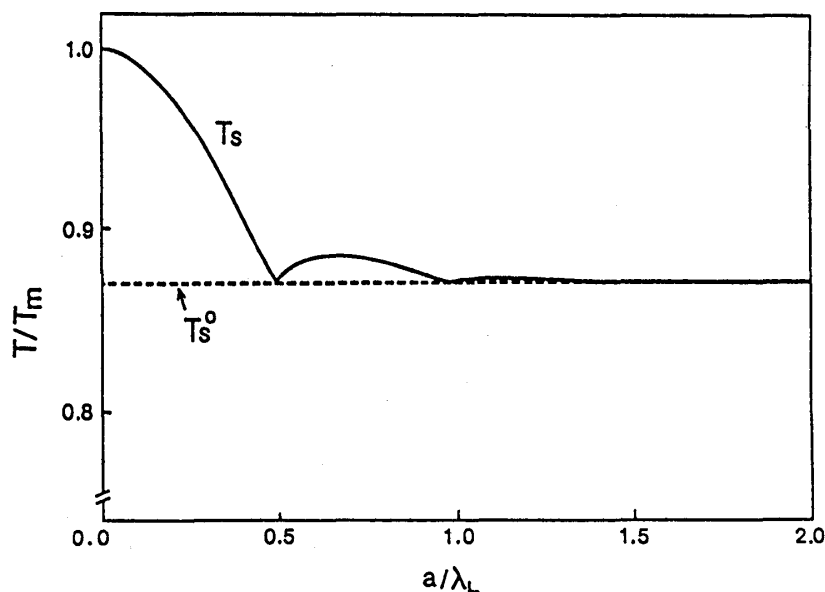


図 26. 臨界温度 T_s の膜厚 ($2a$) 依存性

磁性超伝導体に関する解説が固体物理にあるので参照されたい²³⁾。ここで述べた話しは、Thermo-field Dynamics と呼ばれる有限温度の場の量子論により有限温度に拡張される。これに関しては文献 9, 10 を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) H. Matsumoto and H. Umezawa, Fortschritte der Physik. 24 (1976) 357.
 - 2) H. Matsumoto, M. Tachiki and H. Umezawa, Fortschritte der Physik 25 (1977) 273.
 - 3) H. Matsumoto, G. Semenoff, H. Umezawa and M. Tachiki, Fortschritte der Physik 28 (1980) 67.
- Functional Integral Formalism の基礎づけについては
- 4) R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1947) 367; Phys. Rev. 74 (1948) 1430.
 - 5) J. Schwinger, Proc. Nat. Acad. Sci. 37 (1951) 452.
 - 6) K. Symanzik, Z. Naturforsch 9 (1954) 809.
 - 7) H. Umezawa and A. Visconti, Nuovo Cimento 1 (1955) 1079.

- 8) Lectures at the School on Renormalization and Invariance in Quantum field Theory, ed. E. R. Caianiello, page 61 (Plenum Press)
Thermo-field Dynamics については
- 9) Y. Takahashi and H. Umezawa, Collective Phenomena 2 (1975) 55.
- 10) H. Matsumoto, Fortschritte der Physik 25 (1977) 1.
Magnetic Superconductor については
- 11) M. Tachiki, H. Matsumoto and H. Umezawa, Phys. Rev. B20 (1979) 1915.
- 12) H. Matsumoto, H. Umezawa and M. Tachiki, Solid State Commun. 31 (1979) 157.
- 13) M. Tachiki, A. Kotani, H. Matsumoto and H. Umezawa, Solid State Commun. 31 (1979) 927.
- 14) M. Tachiki, A. Kotani, H. Matsumoto and H. Umezawa, Solid State Commun. 32 (1979) 599.
- 15) M. Tachiki, T. Koyama, H. Matsumoto and H. Umezawa, Solid State Commun. 34 (1980) 269.
- 16) M. Tachiki, S. Takahashi, H. Matsumoto and H. Umezawa, Solid State Commun. 35 (1980) 393.
- 17) M. Tachiki, H. Matsumoto, T. Koyama and H. Umezawa, Solid State Commun. 34 (1980) 19.
- 18) A. Kotani, S. Takahashi, M. Tachiki, H. Matsumoto and H. Umezawa, The Proceedings of the Int. Conf. Ternary Superconductors.
- 19) M. Tachiki, The Proceedings of the Int. Conf. Ternary Superconductors, "Unusual Magnetic and Superconducting Behavior of Ternary Superconductors".
- 20) L. Leplae, F. Mancini and H. Umezawa, Phys. Rep. C10 (1974) 151.
- 21) W. A. Fertig, D. C. Johnston, L. E. DeLong, R. W. McCallum, M. B. Maple and B. T. Matthias, Phys. Rev. Letters 38 (1977) 987.
- 22) H. C. Ku and F. Acker, Solid State Commun. 35 (1980) 937.
- 23) 立木 昌, 高橋三郎, 固体物理 15 (1980) 199.

付記)

この講義録は、昭和55年12月4日から12月6日まで、京都大学理学部物理教室において、大学院生向けになされた特別講義、及び談和会に基づいたものである。12月6日の講義は、前日になされた「超伝導と磁性」と題する談話会の内容を補足する形で行なわれた。そのため、本講義録では、特別講義と談話会の内容を合わせ整理した。なお、立木教授には原稿の段階で御一読をお願いし補筆修正して頂いた。

(記録 京大・理・物 神山 保)